Föreläsning 3

Vi ska nu börja kolla på punktföljder och speciellt konvergens för följder. Vi kommer därefter gå över till serier och konvergens för dessa. Vi börjar med grunderna och därför ska vi definiera vad en följd är:

Definition (Följd)

Låt (M,d) vara ett metriskt rum. En följd i M är en funktion $f: \mathbb{N} \to M$.

Som vanligt som när vi pratar om följder så identifierar vi följden med dess bild, dvs vi låter $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, $x_3 = f(3)$, ... och pratar endast om $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ som följden. Vi ska snart definiera vad det betyder att en följd konvergerar, men först en definition till

Definition (För eller senare)

Låt $P_1, P_2, P_3, \ldots$ vara påståenden. Vi säger att påståendet P_j är för eller senare sant om

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow P_n \text{ (är sant)}$$

Definition: (Konvergens)

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd i ett metriskt rum (M, d).

Vi säger att $\{x_n\}$ är konvergent mot punkten x, skrivet $x_n \to x$ eller $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, om det för varje boll/omgivning $U \ni x$ är så att förr eller senare ligger x_n i U. Om $\{x_n\}$ är inte konvergent, så är den divergent.

Denna definition är ekvivalent med denna omformulering:

Definition: $(x_n \to x)$

$$x_n \to x \ , n \to \infty$$
$$\iff$$
$$\forall r>0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow \underbrace{x_n \in B(x,r)}_{d(x,x_n) < r}$$

Observation:

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd i $\mathbb{R}$ med Euklidiska metrik. Vi kan då skriva om $x_n \to x$ i termer av epsilon-formalism:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon$$

Alltså ε och radien för bollen har samma uppgift.

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}$ med Euklidisk metrik. Vi ska visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0 \quad , a>0.$$

Vi har att

$$|1+na| > |na| \underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\ a>0}}{=} na$$

Detta ger att

$$\left|\frac{1}{1+na}-0\right| = \left|\frac{1}{1+na}\right| < \frac{1}{na}.$$

Låt $N > \frac{1}{a\varepsilon}$ vara ett heltal varvid vi får för alla $\varepsilon > 0$ och alla $n \geq N$ att

$$\frac{1}{na} < \frac{1}{\frac{1}{a\varepsilon}\cdot a} = \varepsilon$$

Alltså vi får att

$$\left|\frac{1}{1+na}-0\right| < \varepsilon$$

så $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0.$

Ex:

Betrakta $\mathbb{R}$ med Euklidisk metrik. Vi ska visa att följden $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ är divergent. Låt $x_n=(-1)^n$.

Antas att $x_n \to x$. Vi ska visa att för en motsägelse.

Eftersom x_n är konvergent så gäller att för alla $\varepsilon > 0$, t.ex. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, att om $n \geq N$ (för visst $N \in \mathbb{N}$) så är $|x_n - x| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. Vidare så gäller att

$$2 = |x_n - x_{n+1}| = |(x_n - x) + (x - x_n)| \leq$$

$$\leq |x_n - x| + |x - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Triangelolikheten

Men $2 = 1$ är ju en motsägelse, så $x_n \not\to x$ så $\{x_n\}$ divergent.

Nästa sats säger att gränsvärden är unika:

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd i M. Antas att $x_n \to x$ och att $x_n \to y$. Då gäller att $x = y$.

"Slappt" bevis:

Vi har att

$$d(x,y) \underset{\uparrow}{\leq} d(x,x_n) + d(x_n,y) \underset{\uparrow}{\to} 0 + 0 = 0. \quad n \to \infty$$

triangelolikheten

enligt antagande

Men eftersom $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in M$ så får vi att

$$0 \leq d(x,y) \leq 0$$

så $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

$\square$

Ett mer formellt bevis innehåller ett ε-argument, se boken för detta.

Definition: (Begränsad följd).
Låt (M,d) vara ett metriskt rum och låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ vara en följd i M. Vi säger att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsad om det finns ett $r > 0$ och en boll $B(x,r)$ så att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(x,r)$.

Anmärkning:

Alltså en följd är begränsad om den är begränsad som mängd.

Sats:

Konvergenta följder är begränsade.

"Slappt" Bevis:

Antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (M,d)$ är konvergent, så säg att $x_n \to x$. Vi definierar svansen för $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ att vara "slutet" av följden: $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$ för något $m \in \mathbb{N}$. Om $B(x,r)$ är bollen runt x så att svansen för $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ligger helt i $B(x,r)$, då är följden begränsad.

Bevis:

Antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (M,d)$ är konvergent, så antag att $x_n \to x$. Då gäller för alla $r>0$ att det finns ett $N \in \mathbb{N}$ så att för alla $n \geq N$ implicerar att $x_n \in B(x,r)$. Detta betyder att vi kan fixera en boll $B(x,r)$ som uppfyller detta.

Låt $d_k := d(x, x_k)$ för $k=1, \dots, N$. Definiera

$$\rho := 2 \cdot \max\{d_1, d_2, \dots, d_N, r\}.$$

Då gäller att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(x,\rho)$, så varför gäller detta:

Vi kollar på två fall:

1) $k \leq N$

2) $k > N$

Vi börjar med det första fallet. Om $k \leq N$ så gäller att

$$d_k = d(x, x_k) < \rho = 2 \cdot \max\{d_1, \ldots, d_N, r\}.$$

vilket betyder att $x_k \in B(x, \rho)$.

I det andra fallet så gäller att

$\underline{k > N}$: $$d(x, x_k) \underbrace{<}_{\{x_k\} \text{ konvergent}} r < \rho = 2 \cdot \max\{d_1, \ldots, d_N, r\}.$$

vilket ger att $x_k \in B(x, \rho)$.

Dessa två fall ger att $x_k \in B(x, \rho)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, så $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(x, \rho)$, vilket betyder att följden är begränsad.

$\square$

Ex: Trots $(-1)^n$ är begränsad så är den inte konvergent!

Vi ska nu koppla ihop konvergens med hopningspunkter samt slutna mängder. Dessa har ett intimt förhållande och vi ska nu kolla på några satser.

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd i M så att $x_n \to x$. Då gäller att för eller senare att $x_n = x$ eller så är x en hopningspunkt till $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Bevis:

Eftersom $x_n \to x$ så gäller för alla $r>0$ att det finns en boll $B(x,r)$ med $x_n \in B(x,r)$ för $n \geq N$. Om $x_n \neq x$ så är x en hopningspunkt (per definition), medan om $x_n = x$ så är x i mängden $\{x_n\}$, så resultatet följer.

$\square$

Följd:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och antag att $S \subset M$ är en sluten mängd. Låt $\{x_n\} \subset S$ vara en följd och antag att $x_n \to x$. Då gäller att $x \in S$.

Bevis:

Eftersom S är sluten så innehåller S sina hopningspunkter S' (se föreläsning 2 sid 43). Föregående sats ger att för eller senare att $x_n = x$, vilket betyder att $x \in S$, ty $\{x_n\} \subset S$, eller så är x en hopningspunkt till $\{x_n\}$. Detta ger också att $\{x_n\} \subset S$ ty S innehåller sina hopningspunkter.

$\square$

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och antag att S är en mängd i M. Om $x \in S'$ är en hopningspunkt då finns det en följd $\{x_n\}$ i S så att $x_n \to x$.

Bevis:

Antag att x är en hopningspunkt till S. Då finns det för varje $n \in \mathbb{N}$ en punkt $x_n \in B(x, 1/n) \cap S$. Vi får då en följd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ i S så att

$$d(x, x_n) < \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Alltså $x_n \to x$.

$\square$

Sats:

Låt (M,d) vara ett metriskt rum och antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd i M med $x_n \to x$. Då är $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x\}$ en sluten mängd.

Bevis:

Eftersom x är en hopningspunkt till $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ så betyder det att $\{x_n\} \cup \{x\}$ är det slutna höljet av $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Det slutna höljet av en mängd är alltid en sluten mängd.

$\square$

Låt oss diskutera några resultat om följder i $\mathbb{R}$.

I alla resultat så kommer $\mathbb{R}$ ha Euklidisk metrik.

Sats:

Antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ och $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergenta följder i $\mathbb{R}$, säg $x_n \to x$ och $y_n \to y$. Då gäller att

a) $x_n \pm y_n \to x \pm y$

b) $c \cdot x_n \to cx \quad \forall c \in \mathbb{R}$

c) $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$

d) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ om $y_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ och $y \neq 0$.

Beviset är en bra övning i konvergensformalism. Försök själva innan ni kollar på bokens bevis.

Nästa sats kan vara användbart för att avgöra konvergens av följder i $\mathbb{R}$.

Anmärkning:

I allmänna metriska rum så är det inte säkert att man kan addera, multiplicera och dividera med följder.

Sats: (Kvottest)

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av reella tal. Låt

$$y_n := \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Antag att $y_n \to y$, där vi tillåter $y = \infty$.

Då gäller att

a) Om $y < 1 \Rightarrow x_n \to 0$

b) Om $y > 1 \Rightarrow x_n$ divergent

c) Om $y = 1 \Rightarrow x_n$ kan vara konvergent eller divergent.

Ex:

Låt $x_n = \frac{1}{2^n}$ vara en följd. Låt $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2^{n+1}} \Big/ \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$.

Då gäller att $y_n \to \frac{1}{2}$, ty y_n är konstant lika med $\frac{1}{2}$.

Nu ger kvottestet att $x_n \to 0$. Detta kunde vi förstås se på en gång.

Ex:

Låt $x_n = \frac{1}{n}$, varvid $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$, så enligt kvottestet så får vi ingen information, men vi vet ju att $x_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Ex:

Låt $x_n = n$ och $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$. Kvottestet ger att vi inte vet vad som händer med x_n, men vi ser ju att x_n är divergent.

Anmärkning:

Var alltid försiktig när ~~ni~~ använder ~~er~~ av kvottestet. Det var detta som dessa exempel skulle visa.

Ibland så kan det vara bra att studera en del av en följd.

Definition: (Delföljd)

Antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd i ett metriskt rum M. Vi säger att $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en delföljd till $\{x_n\}$ om det finns en strikt växande funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så att $y_n = x_{f(n)}$.

Anmärkning:

Kom ihåg att en strikt växande funktion f uppfyller att

$$f(n) < f(m)$$

om $n < m$.

Sats:

Delföljder till konvergenta följder konvergerar.

Bevis:

Antag att $\{x_n\}$ är en följd i ett metriskt rum (M,d) och låt $\{x_{f(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ vara en delföljd. Antag att $x_n \to x$. Vi ska visa att $x_{f(n)} \to x$. Låt $\varepsilon > 0$. Då finns det ett $N \in \mathbb{N}$ så att för alla $n \geq N$ gäller att $d(x_n, x) < \varepsilon$. Eftersom $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ är strikt växande så finns ett n_1 så att $f(n) \geq N$ för alla $n \geq n_1$. Detta ger att $d(x_{f(n)}, x) < \varepsilon$, så $x_{f(n)} \to x$.

$\square$

Ex:

Detta exempel ska visa på delföljder av divergenta följder också kan konvergera. Låt $x_n = (-1)^n$. Vi har tidigare sett, sidan 4, att x_n är divergent. Betrakta delföljderna $y_n = x_{2n} = (-1)^{2n} = \underline{1}$ och $z_n = x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$. Då gäller att $y_n \to \underline{1}$ och $z_n \to \underline{-1}$, så båda delföljderna är konvergenta trots ursprungsföljden är divergent.

Sats:

Låt (M,d) vara ett kompakt metriskt rum, och låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd i M. Då finns det en delföljd till $\{x_n\}$ som konvergerar.

Bevisidé:

Om $\{x_n\}$ endast innehåller ett ändligt antal distinkta punkter så finns det ett x_k som är konstant för oändligt många värden på k. Vi kan välja detta som delföljd. Om $\{x_n\}$ är en oändlig mängd så har, ty M är kompakt, $\{x_n\}$ en hopningspunkt $x \in M$. I varje omgivning kring x så finns det oändligt många punkter av $\{x_n\}$. Välj dessa som delföljd, varvid denna delföljd konvergerar mot x.

$\square$.

En följd till denna sats samt Heine-Borels sats är den så kallade Bolzano-Weierstrass sats:

Sats: (Bolzano-Weierstrass)

Varje begränsad följd i $\mathbb{R}^n$ har en konvergent delföljd.

Bevis:

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad följd. Då är $\overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ sluten och begränsad så enligt Heine-Borels sats får vi att den är kompakt. Nu ger föregående sats att $\{x_n\}$ har en konvergent delföljd.

$\square$

Utifrån beviset av denna sats får vi en annan version av Bolzano-Weierstrass sats, nämligen en karaktärisering av kompakta mängder i $\mathbb{R}^n$.

Sats: (Bolzano-Weierstrass ver. 2)

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt

$\Longleftrightarrow$

Varje följd i K har en delföljd som konvergerar mot ett element i K.

Vi ska ge ett annat bevis av Bolzano-Weierstrass sats i $\mathbb{R}$, men för att göra det så måste vi ha lite mer terminologi.

Definition: (växande, avtagande, monoton)

Om $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd i $\mathbb{R}$ så kallas $\{x_n\}$

a) växande om $x_{n+1} \geq x_n$

b) avtagande om $x_{n+1} \leq x_n$

c) monoton om $\{x_n\}$ är växande eller avtagande.

d) strikt växande om $x_{n+1} > x_n$

e) strikt avtagande om $x_{n+1} < x_n$

f) strikt monoton om $\{x_n\}$ är strikt växande eller strikt avtagande.

Sats: (Monotona konvergenssatsen)

Antag att $\{x_n\}$ är en monoton följd i $\mathbb{R}$. Då är $\{x_n\}$ konvergent om och endast om $\{x_n\}$ är begränsad

Bevis:

$\Rightarrow$: Om $\{x_n\}$ är konvergent så är det klart att $\{x_n\}$ är begränsad (se sats sidan 6).

$\Leftarrow$: Boken visar då $\{x_n\}$ är växande, så vi ska visa det fallet då $\{x_n\}$ är avtagande, dvs då $x_{n+1} \leq x_n$.

Eftersom $\{x_n\}$ är begränsad och avtagande så har $\{x_n\}$ ett infimum, säg att $x = \inf\{x_n\}$. Då gäller att

$$x \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

För varje $\varepsilon > 0$ så finns det ett N så att

$$x \leq x_N < x + \varepsilon$$

Om ett sådant ε inte skulle finnas så skulle $x + \varepsilon$ vara en undre gräns för $\{x_n\}$. Eftersom $\{x_n\}$ avtar, så får vi för alla $n \geq N$ att

$$x \leq x_n < x + \varepsilon.$$

Eftersom detta gäller för alla $\varepsilon > 0$ så får vi att $x_n \to x$.

$\square$

<u>Följd:</u>

Om $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ är en monoton och begränsad följd. Då gäller att

a) om $\{x_n\}$ är växande så är $\sup\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n$

b) om $\{x_n\}$ är avtagande så är $\inf\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Det är klart att varje följd inte är monoton, men nästa sats säger att varje följd har en monoton delföljd.

Sats: (Monotona delföljdssatsen)

Låt $\{x_n\}$ vara en följd i $\mathbb{R}$. Då finns en monoton delföljd till $\{x_n\}$.

Bevisidé:

Välj ut de punkter $x_m \geq x_n \;\forall n \geq m$.
Antingen så har man oändligt antal sådana punkter eller ett ändligt antal punkter. Utifrån dessa punkter kan man skapa monotona delföljder.

$\square$

Bevis av Bolzano-Weierstrass i $\mathbb{R}$:

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ vara en begränsad följd. Använd Monotona delföljdssatsen för att hitta en monoton delföljd $\{x_{f(n)}\}$ som också är begränsad eftersom $\{x_n\}$ är det. Nu ger Monotona konvergenssatsen att $\{x_{f(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ är konvergent.

$\square$

Cauchy följder:

Definition: (Cauchyföljder)

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd i ett metriskt rum (M,d). Vi säger att $\{x_n\}$ är Cauchy om

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,m \in \mathbb{N} : n,m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Observation:

En följd $\{x_n\}$ är Cauchy om termerna i följden ligger förr eller senare godtyckligt nära varandra.

Ex:

Låt $\mathbb{R}$ ha den Euklidiska metriken och betrakta följden $x_n = \frac{1}{n}$. Vi ska se att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är Cauchy. Låt $\varepsilon > 0$. Låt N vara ett heltal så att $N > 2/\varepsilon$. För $n,m \geq N$ så har vi att

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{och} \quad \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Detta ger för $n,m \geq N$ att

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtycklig, så följer det att $\{\frac{1}{n}\}$ är Cauchy i $\mathbb{R}$. Vidare så är x_n konvergent i $\mathbb{R}$: $x_n \to 0$

Sats:

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en konvergent följd i ett metriskt rum (M,d). Då är $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy följd

Bevis:

Antag att $x_n \to x$ då $n \to \infty$. Då gäller att

$$d(x_n, x_m) \underset{\uparrow}{\leq} d(x_n, x) + d(x, x_m) \to 0 + 0 = 0 \quad , n,m \to \infty.$$

triangelolikhet

Detta ger att $\{x_n\}$ är en Cauchy följd

D.

Beviset ovan är en aning slappt. Gör dessa argument med ε-formalism.

Sats:

Antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchy-följd i ett metriskt rum (M,d). Då är $\{x_n\}$ begränsad.

Bevis:

Låt $\varepsilon = 1$ och välj $N \in \mathbb{N}$ så att om $m,n \geq N$ så gäller att

$$d(x_n, x_m) < 1 \quad \text{(detta är möjligt, ty } \{x_n\} \text{ är Cauchy)}$$

Detta betyder att nästan alla x_n ligger i $B(x_N, 1)$, förutom möjligen $x_1, \dots, x_{N-1}$. Dessa är endast ett ändligt antal, så vi kan välja ett R så att $\{x_n\} \subset B(x_N, R)$.

D

Vi har tidigare sett:

- $\{x_n\}$ konvergent $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ begränsad
- $\{x_n\}$ konvergent $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ Cauchy
- $\{x_n\}$ Cauchy $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ begränsad.

Den stora frågan är:

Om $\{x_n\}$ är Cauchy, är då $\{x_n\}$ konvergent?

Svaret är Nej!

<u>Ex:</u>

Låt $M = (0,1]$ vara ett metriskt rum med Euklidisk metrik. Betrakta följden $x_n = \frac{1}{n}$ i M. Vi har att $x_n \to 0$ i $\mathbb{R}$, men $0 \notin M$, så x_n konvergerar <u>inte</u> i M. Däremot så är x_n Cauchy enligt samma argument som exemplet på sidan 19. Man kan även se att x_n <u>inte</u> har någon konvergent delföljd.

<u>Definition:</u> (Fullständigt metriskt rum)
Låt (M,d) vara ett metriskt rum. Vi säger att M är <u>fullständigt</u> om varje Cauchyföljd konvergerar.

Ex:

Som vi såg i förra exemplet så är $[0,1]$ inte ett fullständigt metriskt rum med Euklidisk metrik.

Ett exempel på ett fullständigt metriskt rum är $\mathbb{R}^n$. Vi ska här presentera ett bevis för $n=1$.

Sats: ($\mathbb{R}$ är ett fullständigt metriskt rum)

Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd i $\mathbb{R}$. Då är $\{x_n\}$ konvergent om och endast om $\{x_n\}$ är Cauchy.

Bevis:

$\Rightarrow$: Detta är satsen på sidan 20.

$\Leftarrow$: Antag att $\{x_n\}$ är Cauchy. Vi ska visa att $\{x_n\}$ konvergerar. Eftersom $\{x_n\}$ är Cauchy så är den begränsad enligt sats på sidan 20. Nu ger Bolzano-Weierstrass sats att det finns en delföljd $\{x_{f(n)}\}$ som konvergerar mot säg x, dvs $x_{f(n)} \to x$. Vi ska visa att $x_n \to x$.

Eftersom $\{x_n\}$ är Cauchy så finns det för varje $\varepsilon > 0$ ett tal N så att om $n, m \geq N$ då är

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Eftersom $x_{f(n)} \to x$ så finns ett tal $M \geq N$ så att

$$|x_M - x| < \varepsilon/2$$

Här måste vi anta att $M \in \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Eftersom $M \geq N$ så kan vi välja $m = M$ i Cauchyvillkoret, så

$$|x_n - x_M| < \varepsilon/2 \quad , \quad n \geq N.$$

Detta ger för alla $n \geq N$ att

$$|x_n - x| = |(x_n - x_M) + (x_M - x)| \leq$$

$$\underset{\text{Triangelolikhet}}{\leq} |x_n - x_M| + |x_M - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ var godtyckligt så följer det att $x_n \to x$.

$\square$

En annan viktig egenskap för kompakta metriska rum är:

<u>Sats:</u>

Kompakta metriska rum är fullständiga.

<u>Bevis:</u>

Låt (K, d) vara ett kompakt metriskt rum och låt $\{x_n\}$ vara en Cauchyföljd i K. Vi ska visa att $\{x_n\}$ konvergerar. Satsen på sidan 14 säger att $\{x_n\}$ har en konvergent delföljd, säg att $x_{f(n)} \to x$. Nu kan fortsätta precis som i beviset ovan.

$\square$

Serier:

Vi ska nu betrakta oändliga summor av följder av tal. Om $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ är en följd av komplexa tal så definierar vi den tillhörande <u>serien</u> genom

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

För att avgöra konvergens för en sådan serie så inför vi så kallade <u>partialsummor</u>:

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} x_n = x_1 + \dots + x_k$$

<u>Definition:</u> (Konvergens)

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ <u>konvergerar</u> om följden av partialsummor $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergerar. Vi skriver då

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s = \lim_{k\to\infty} s_k .$$

Om $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ <u>inte</u> konvergerar, så säger vi att serien divergerar.

Sats: (Cauchykriterie för serier)

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerar $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: m \geq n \geq N$ så att $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerar, dvs partialsummorna uppfyller att $s_n \to s$. Men eftersom $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ är en följd som konvergerar så är även $\{s_n\}$ Cauchy i $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eftersom det är ett fullständigt metriskt rum.

$\Leftarrow$: Att $\{s_n\}$ är Cauchy betyder att $\{s_n\}$ är konvergent i $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Detta ger att $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ är konvergent

$\square$

Nästa sats ger ett nödvändigt villkor för konvergens av serier, men observera att det inte är ett tillräckligt villkor:

Sats:

Om $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergerar så är $x_n \to 0$.

Bevis:

Vi har att partialsummorna konvergerar, dvs $s = \lim_{k\to\infty} s_k$ existerar. Detta ger att

$$x_n = s_n - s_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

$\square$

Ex:

Villkoret i förra satsen är inte tillräckligt, ty $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ medan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent.

Vi har ytterligare en konsekvens från resultaten om följder.

Sats:

Antag att $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ är icke-negativa, dvs $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Då konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ om och endast om $\{s_k\}$ är en begränsad följd.

Bevis:

Eftersom $\{x_n\}$ är alla icke-negativa så bildar partialsummorna $s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$. en växande följd, dvs en monoton följd. Nu ger monotona konvergenssatsen (sid. 16) att $\{s_k\}$ är konvergent om och endast om $\{s_k\}$ är en begränsad följd.

$\square$

Definition: (Absolut konvergens)

Låt $\sum x_n$ vara en serie i $\mathbb{C}$. Vi säger att denna serie är <u>absolutkonvergent</u> om $\sum |x_n|$ är konvergent.

Ex:

Betrakta den alternerande harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Då är denna serie <u>inte</u> absolutkonvergent, ty

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som är en harmonisk serie är divergent. Däremot så är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent, så låt oss visa detta. Betrakta partialsummorna

$$s_{2k} = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{>0} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)}_{>0}$$

och

$$s_{2k+1} = \frac{1}{1} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}_{>0} - \ldots - \underbrace{\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)}_{>0}$$

Detta ger att $\{s_{2k}\}$ växer och $\{s_{2k+1}\}$ avtar. Vidare så gäller att

$$0 < s_{2k} < s_{2k} + \frac{1}{2k+1} = s_{2k+1} \leq 1$$

Alltså är $\{s_{2k}\}$ och $\{s_{2k+1}\}$ begränsade nedåt av 0 och uppåt av 1.

Detta ger enl. Monotona konvergenssatsen att delföljderna konvergerar mot säg s, dvs $s_{2k} \to s$ och $s_{2k+1} \to s$. Detta ger att $\{s_k\}$ konvergerar mot s, dvs $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = s$ är konvergent.

Man kan visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, men detta är svårt.

Detta exempel visar att konvergenta serier inte behöver vara absolut konvergenta. Men hur är det med omvändningen.

<u>Sats:</u>

Om $\sum x_n$ är en absolut konvergent serie i $\mathbb{C}$, då är $\sum x_n$ konvergent.

<u>Anmärkning:</u>

Låt M vara ett fullständigt metriskt rum där man kan definiera addition. Om $\sum x_n$ är en absolutkonvergent serie i M, då är $\sum x_n$ konvergent i M.

Bevis av resultatet i $\mathbb{C}$:

Eftersom $\sum |x_n|$ är konvergent och vi befinner oss i ett fullständigt metriskt rum så är partialsummorna en Cauchy följd, dvs givet $\varepsilon > 0$ så finns $N \in \mathbb{N}$ så att om $m > n \geq N$ då gäller att

$$|\overset{\sum_{k=1}^{m}|x_k|}{s^*_m} - \overset{\sum_{k=1}^{n}|x_k|}{s^*_n}| = \big||x_1| + \dots + |x_m| - |x_1| + \dots + |x_n|\big| =$$

$$= |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \dots + |x_m| < \varepsilon.$$

Om $\{s_k\}$ är partialsummorna för $\sum x_n$ då får vi att

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + \dots + x_m| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangelolikheten}}}{\leq} |x_{n+1}| + \dots + |x_m| < \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtyckligt så följer att $\{s_k\}$ är en Cauchy följd i $\mathbb{C}$, som är ekvivalent med att $\{s_k\}$ konvergerar, dvs att $\sum x_n$ är konvergent.

$\square$

Definition: (Betingad konvergens)

En konvergent serie som ej är absolutkonvergent kallas för betingat konvergent.

Ex:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$ är betingat konvergent, se exempel sidan 27.

Låt oss betrakta den alternerande harmoniska serien igen.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Vi har sett att denna är konvergent. Säg att vi omgrupperar termerna i denna serie. Vad händer då? En omgruppering av serien ovan är

$$1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{13}\right) - \dots$$

Detta påverkar faktiskt inte konvergensen av serien. Vi har följande resultat

Sats:

Antag att $\sum x_n$ är en konvergent serie. Då konvergerar alla omgrupperingar av serien $\sum x_n$ till samma värde som $\sum x_n$.

Satsens omvändning gäller inte:

Ex:

Betrakta serien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Eftersom termerna inte går mot noll så konvergerar denna serie inte. Om vi gör följande omgruppering

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \underbrace{(1-1)}_{=0} + \underbrace{(1-1)}_{=0} + \underbrace{(1-1)}_{=0} + \dots$$

så konvergerar högerledet, men vi vet ju att serien är divergent.

Vi har sett att omgrupperingar inte påverkar konvergenta serier. Vad händer om vi omordnar termerna? Vi börjar kolla på vad vi menar med en omordning:

Harmonisk serie: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$

Omordnad Harmonisk serie: $\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

En mer formell definition för omordning är

<u>Definition:</u> (Omordning av serier)

En serie $\sum y_k$ är en <u>omordning</u> av serien $\sum x_n$ om det finns en bijektiv funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så att $y_k = x_{f(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Som vi såg tidigare så kan vi alltid omgruppera termer i en konvergent serie utan att förstöra konvergensen. Följande gäller för omordnade serier:

<u>Sats:</u>

Antag att $\sum x_n$ är en absolutkonvergent serie. Då konvergerar alla omordningar $\sum y_k$ av $\sum x_n$ till samma värde som $\sum x_n$.

Omordnade serier har följande otroliga egenskap.

Sats: (Riemann)

Antag att $\sum x_n$ är en betingat konvergent serie. Låt x vara godtycklig. Då finns det en omordning av $\sum x_n$ som konvergerar mot x.

Bevisidé:

Vi ska skapa en serie som konvergerar mot x. Tag positiva termer tills partialsummorna blir större än x. Tag sedan negativa termer så att partialsumman blir mindre än x. Tag sedan positiva termer igen tills partialsummorna blir större än x. Och sen negativa termer, positiva termer, osv. Serien som vi har skapat kommer att konvergera mot x.

$\square$

Vi ska nu titta på några jämförelsekriterier/test för serier.

Sats:

Antag att $\{x_n\}$ och $\{y_n\}$ är reella följder med $0 < x_n, y_n$. Om

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0 \Rightarrow \left(\sum y_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \sum x_n \text{ konv.}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty \Rightarrow \left(\sum x_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \sum y_n \text{ konvergerar}\right)$

c) $\lim_{n\to} \frac{x_n}{y_n}$ existerar men är inte 0 eller ∞. Då gäller att

$$\sum x_n \text{ konvergerar} \Leftrightarrow \sum y_n \text{ konvergerar.}$$

Ex:

Vi ska se att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent. Eftersom $\frac{1}{n^2} > 0$ så växer partialsummorna, vilket betyder att $\{s_k\}$ är en monoton följd. Om vi kan hitta en begränsad delföljd till $\{s_k\}$ så kommer $\{s_k\}$ konvergera. Låt $k_n = 2^n - 1$. Då är $s_{k_1} = s_1 = 1$. Vidare så är

$$s_{k_2} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2}$$

och

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$

Man kan nu använda induktion för att visa att

$$s_{k_n} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Kom ihåg följande:

Geometrisk serie: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & ; 0 \leq x < 1 \\ \text{divergerar} & ; x \geq 1. \end{cases}$

Detta betyder att partialsummorna $\{s_{k_n}\}$ är begränsad av en geometrisk serie med $x = \frac{1}{2}$. Detta betyder att $\{s_{k_n}\}$ är begränsad av $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Så delföljden $\{s_{k_n}\}$ är begränsad så $\{s_n\}$ är konvergent, vilket betyder att $\sum \frac{1}{n^2}$ är konvergent.

Ex:

Vi ska avgöra om $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergerar eller inte. Låt $x_n = \frac{1}{n^2+1}$ och $y_n = \frac{1}{n^2}$. Då gäller att $x_n, y_n > 0$ och att

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^2+1} \Big/ \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1.$$

Nu kan vi använda oss av satsen på sidan 34. som säger att

$$\sum x_n \text{ konvergerar} \iff \sum y_n \text{ konvergerar.}$$

Men enligt föregående exempel så konvergerar $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^2}$ så $\sum \frac{1}{n^2+1}$ konvergerar också.

Sats: (Rotkriteriet)

Låt $\{x_n\}$ vara en följd i $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Om $r = \lim_{n\to\infty} |x_n|^{1/n}$ existerar så gäller att

a) om $r < 1 \Rightarrow \sum x_n$ är absolutkonvergens.

b) om $r > 1 \Rightarrow \sum x_n$ är divergent

Sats: (Kvotkriteriet)

Låt $\{x_n\}$ vara en följd i $\mathbb{R}/\mathbb{C}$. Om $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ existerar så gäller att

a) om $r < 1 \Rightarrow \sum x_n$ är absolutkonvergent

b) om $r > 1 \Rightarrow \sum x_n$ är divergent.

Ex:

Betrakta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ igen. Låt oss försöka använda kvottestet:

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2} \Big/ \frac{1}{n^2}\right| = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| \to 1 \quad \text{då } n\to\infty.$$

Men då ger kvottestet ingen information om konvergensen för $\sum \frac{1}{n^2}$. Försöker man med rottestet så får man att

$$\left|\frac{1}{n^2}\right|^{1/n} \to 1$$

så rottestet ger inte heller någon information.

Definition: (Alternerande serie)

En följd $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ av nollskilda tal i $\mathbb{R}$ sägs vara alternerande om termerna $(-1)^{n+1} x_n, n \in \mathbb{N}$, alla är positiva eller alla negativa. Om $\{x_n\}$ är en alternerande följd så kallar vi serien $\sum x_n$ för en alternerande serie.

Sats: (Leibniz sats)

Antag att $\{x_n\}$ är avtagande följd i $\mathbb{R}$ så att $x_n \downarrow 0$ (x_n avtar mot 0). Då är $\sum (-1)^n x_n$ konvergent.

Ex:

Låt $x_n = \frac{1}{n}$. Då $x_n \downarrow 0$ så $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ är konvergent.

Vi ska avsluta med att kolla på serier på formen $\sum x_n \cdot y_n$.

Sats: (Dirichlets sats)

Om $x_n \downarrow 0$ och $\sum y_n$ har begränsade partialsummor, då är $\sum x_n y_n$ konvergent.

Ex:

Låt $x_n = \frac{1}{n}$ och $y_n = (-1)^n$. Då $x_n \downarrow 0$ och $\sum y_n$ har klart begränsade partialsummor, ty partialsummorna pendlar mellan -1 och 0. Nu ger Dirichlets sats att

$$\sum (-1)^n/n \text{ är konvergent.}$$

Observation:

Dirichlets sats $\Longrightarrow$ Leibniz sats.

Det ovanstående exemplet ger faktiskt beviset om man byter ut $x_n = \frac{1}{n}$ mot en godtycklig följd $x_n \downarrow 0$.

Sats: (Abels sats)

Antag att $\{x_n\}$ är en monoton konvergent följd. Antag även att $\sum y_n$ är konvergent. Då gäller att $\sum x_n y_n$ är konvergent.

Ex:

Betrakta serien $\sum \frac{e^{\frac{10n+3}{n}}}{n \cdot \ln(n) \cdot \sqrt{\ln(n)}}$.

Då är $\{e^{\frac{10n+3}{n}}\}$ en konvergent och monoton följd. $\left(e^{\frac{10n+3}{n}} \to e^{10}\right)$. Serien $\sum \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \sqrt{\ln(n)}}$ kan man visa är konvergent, så Abels sats ger att $\sum \frac{e^{\frac{10n+3}{n}}}{n \cdot \ln(n) \cdot \sqrt{\ln(n)}}$ är konvergent.

Man kan alltså avgöra konvergensen för relativt svåra serier med hjälp av Abels sats.