Föreläsning 4

Denna föreläsning kommer att handla om gränsvärden för funktioner, kontinuitet samt vissa konsekvenser av kontinuitet. Vi kommer jobba mycket i allmänna metriska rum.

Definition: (Gränsvärden för funktioner)

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum. Låt $A \subset M$ och tag $a \in A'$ (en hopningspunkt). Låt $f: A \to N$ vara en funktion. Vi säger att

$$\lim_{x \to a} f(x) = y$$

om

$$(*) \quad \forall r > 0 \ \exists B(a,s) : x \in (B(a,s) \setminus \{a\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(y,r)$$

Anmärkning:

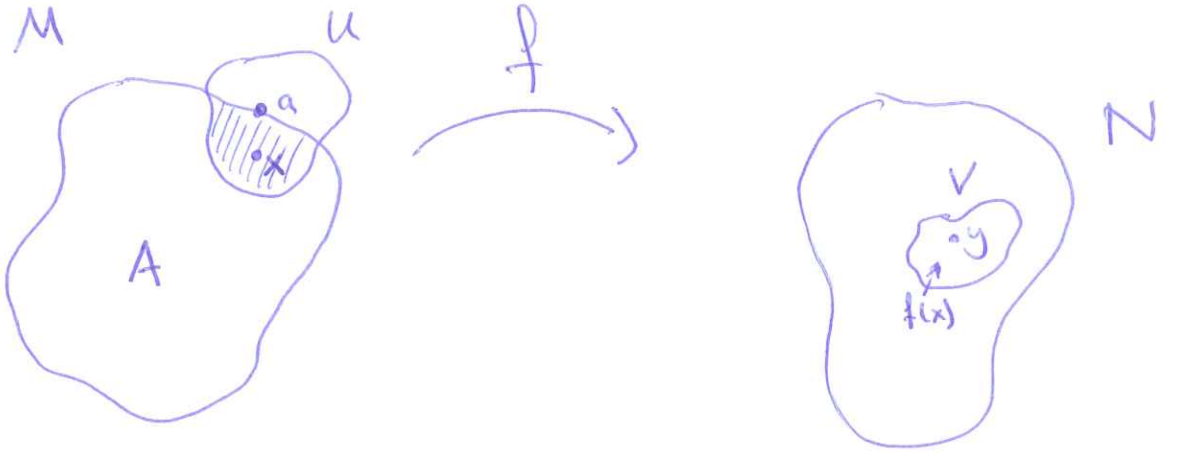
Vi kan byta bollarna i $(*)$ mot omgivningar istället:

$$\forall \text{omgivningar } V \ni y \ \exists \text{omgivning } U \ni a : x \in (U \setminus \{a\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in V$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A : 0 < d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), y) < \varepsilon.$$

Bild:



Låt oss se vad detta betyder i $\mathbb{R}$, dvs funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Låt $A\subset\mathbb{R}$ vara ett intervall och låt $a\in A'$. Vi säger att

$$\lim_{x\to a} f(x) = y$$

om

$$\forall \varepsilon>0\ \underbrace{\exists\delta>0 \text{ så att om } 0<|x-a|<\delta}_{\exists B(a,\delta)\ :\ x\in (B(a,\delta)\setminus\{a\})\cap A} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-y|<\varepsilon}_{f(x)\in B(y,\varepsilon)}.$$

Jämför med (*) på förra sidan.

Ex:
Låt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x)=x^2$.
Vi ska beräkna $\lim_{x\to 4} f(x)$. Det är klart att $\lim_{x\to 4} f(x)=16$, men låt oss kontrollera detta med definitionen.

Vi vill visa att för alla $\varepsilon > 0$, så finns det $\delta > 0$ och x så att $0 < |x-4| < \delta$ implicerar att

$$|x^2 - 16| < \varepsilon.$$

Vi börjar med att manipulera uttrycket $|x^2-16|$:

$$|x^2-16| = |(x+4)(x-4)| \leq |x+4|\underbrace{|x-4|}_{<\delta} <$$

$$< \delta\,|x-4+8| \underset{\uparrow}{\leq} \delta\left(\underbrace{|x-4|}_{<\delta} + |8|\right) <$$

Triangelolikhet

$$< \delta(\delta + 8) = \delta^2 + 8\delta.$$

För givet $\varepsilon > 0$ välj $\delta > 0$ så att $\delta^2 + 8\delta \leq \varepsilon$.
Då gäller att för x med $0 < |x-4| < \delta$ att

$$|x^2-16| < \delta^2 + 8\delta \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

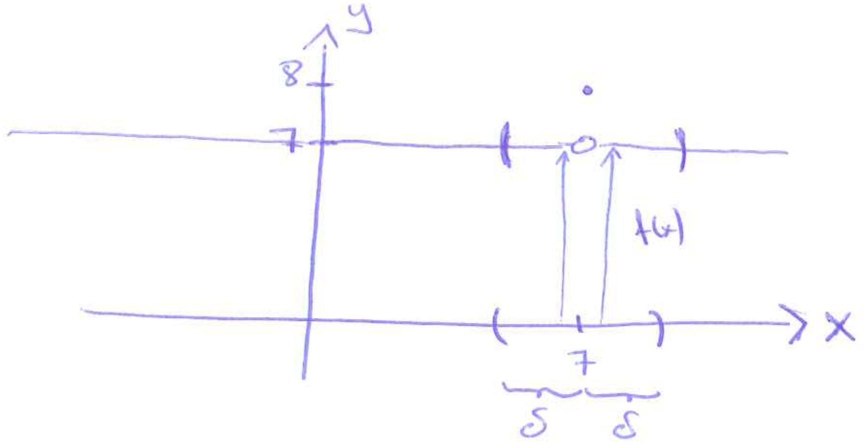
$$|x^2-16| < \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtyckligt så följer det att
$\lim_{x \to 4} x^2 = 16.$

<u>Ex:</u>

Låt $f(x) = \begin{cases} 7 & ; \ x \neq 7 \\ 8 & ; \ x = 7 \end{cases}$ där $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vad blir $\lim_{x \to 7} f(x)$?



Detta ger att $\lim_{x \to 7} f(x) = 7$.

<u>Ex:</u>

Låt $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara given av $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \ x < 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ 1 & , \ x > 1 \end{cases}$

Då existerar <u>inte</u> $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$.

Låt U vara en godtycklig omgivning till 0. Då finns det $0 \neq x \in U$ med $f(x) = 1$ och $0 \neq y \in U$ med $f(y) = -1$.

Därför kan inte gränsvärdet existera.

Sats: (Gränsvärden är unika).

Låt (M, d_M) och (N, d_N) vara metriska rum. Låt $A \subset M$ och tag $a \in A'$. Låt $f: A \to N$ vara en funktion. Om $\lim_{x \to a} f(x) = y$ och $\lim_{x \to a} f(x) = z$ då är $y = z$.

Bevisidé:

Eftersom $\lim_{x \to a} f(x) = y$ så gäller att $d_N(f(x), y) < \frac{\varepsilon}{2}$

och eftersom $\lim_{x \to a} f(x) = z$ så gäller att $d_N(f(x), z) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Då får man att

$$d(y, z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Triangelolikhet}}}{\leq} d(y, f(x)) + d(f(x), z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtyckligt så får vi att

$$d(y, z) \leq 0 \implies d(y, z) = 0 \iff y = z.$$

$\square$

Sats:

Låt (M, d_M) och (N, d_N) vara metriska rum. Låt $A \subset M$ och tag $a \in A'$. Låt $f: A \to N$ vara en funktion. Då gäller att $\lim_{x \to a} f(x) = y$ om och endast om $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$ för alla följder $\{x_n\} \subset A$ så att $x_n \neq x$ och $x_n \to x$.

Beviset för denna sats står i boken, men försök att göra beviset innan du läser boken. Det är en nyttig övning.

Kontinuerliga funktioner

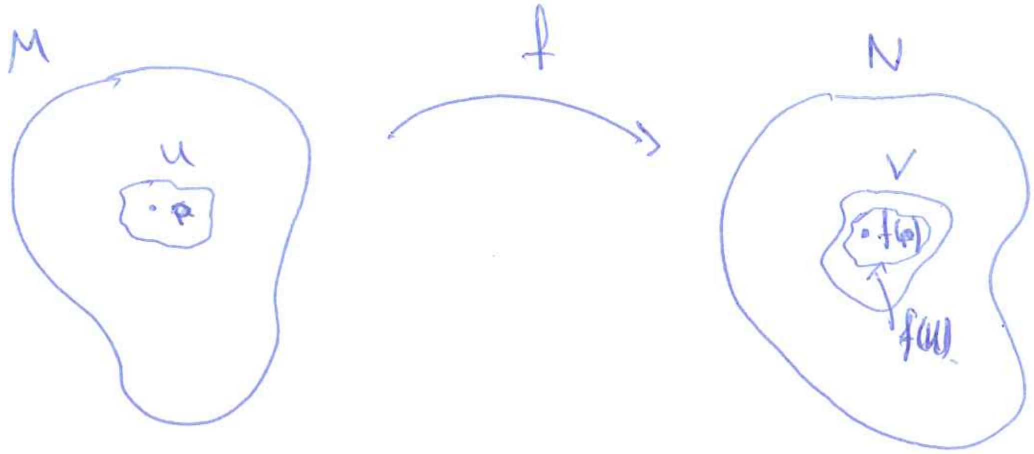
Låt oss börja med en definition

Definition: (Kontinuitet i en punkt)

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum, och antag att $f: M \to N$ är en funktion. Låt $p \in M$. Vi säger att f är kontinuerlig i p om

$\forall$ omgivningar $V \ni f(p)$ $\exists$ omgivning $U \ni p$: $f(U) \subset V$

Bild:



Observation:

Antas att $A \subset M$ och att $a \in A' \cap A$. Då är f kontinuerlig i a om och endast om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ex:

$\text{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$, medan i $x = 0$ så är den inte kontinuerlig. Vi säger att sgn är diskontinuerlig i $x = 0$.

Definition: (Kontinuitet).

$f: M \to N$ är kontinuerlig om f är kontinuerlig i varje punkt $p \in M$.

En viktig, och väldigt användbar, karakterisering av kontinuitet ges i nästa sats:

Sats:

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum och låt $f: M \to N$ vara en funktion. Då är f kontinuerlig om och endast om för alla öppna $U \subset N$ så är $f^{-1}(U)$ öppen i M.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att f är kontinuerlig på M och låt $U \subset N$ vara en öppen mängd. Vi ska visa att varje punkt i $f^{-1}(U)$ är en inre punkt, dvs att $f^{-1}(U)$ är öppen. Antag att $p \in M$ och att $f(p) \in U$. Eftersom U är öppen så finns det en boll $B(f(p), \varepsilon) \subset U$ för något $\varepsilon > 0$. Men eftersom f är kontinuerlig i p så finns en boll $B(p, \delta) \subset M$, $\delta > 0$, så att $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\varepsilon)$ och detta ska gälla för alla bollar $B(f(p),\varepsilon)$, dvs att vi ska kunna hitta en boll $B(p,\delta)$ med denna egenskap. Detta implicerar att $f^{-1}(B(f(p),\varepsilon)) \supset B(p,\delta)$, så $f^{-1}(V)$ är öppen.

?

$f^{-1}(V)$

$\Leftarrow$: Antag att $f^{-1}(U) \subset M$ är öppen för varje öppen $U \subset N$. Fixera $p \in M$ och ett $\varepsilon > 0$. Betrakta bollen $B(f(p), \varepsilon)$. Denna boll är öppen, så $f^{-1}(B(f(p), \varepsilon))$ är öppen. Därför finns boll $B(p, \delta) \subset f^{-1}(B(f(p), \varepsilon))$, som implicerar att $f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \varepsilon)$. Eftersom $B(f(p), \varepsilon)$ var en godtycklig boll så är f kontinuerlig i p. Men dessa argument gäller för alla $p \in M$, så f är kontinuerlig på M.

$\square$

Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = x^2$. Vi ska visa att f är kontinuerlig. Låt $I = (a, b)$ vara ett öppet intervall. Då gäller att

$$f^{-1}((a,b)) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in (a,b)\} = \underbrace{\underbrace{(-\sqrt{b}, -\sqrt{a})}_{\text{öppen}} \cup \underbrace{(\sqrt{a}, \sqrt{b})}_{\text{öppen}}}_{\text{öppen}}$$

Därför är f kontinuerlig.

Ex:

Låt $f: M \to N$ och $g: N \to O$ vara kontinuerliga funktioner mellan metriska rum M, N och O. Tag godtycklig öppen mängd $U \subset O$. Då gäller att

$$(g \circ f)^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U)}_{\text{öppen i } N})}_{\text{öppen i } M}$$

Alltså är $g \circ f$ kontinuerlig. Slutsatsen blir att sammansättningen av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

Sats:

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum och låt $f: M \to N$ vara en funktion. Då är f kontinuerlig om och endast om för alla slutna $S \subset N$ så är $f^{-1}(S)$ sluten i M.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att f är kontinuerlig och låt $S \subset N$ vara sluten. Då är $U = S^c$ öppen i N. Vidare så är

$$(f^{-1}(S))^c = f^{-1}(S^c) = f^{-1}(U) \quad (*)$$

Eftersom U är öppen så och eftersom f är kontinuerlig så ger satsen på sidan 8 att $f^{-1}(U)$ är öppen i M. Vi får därför från (*) att $(f^{-1}(S))^c$ är öppen, dvs att $f^{-1}(S)$ är en sluten mängd.

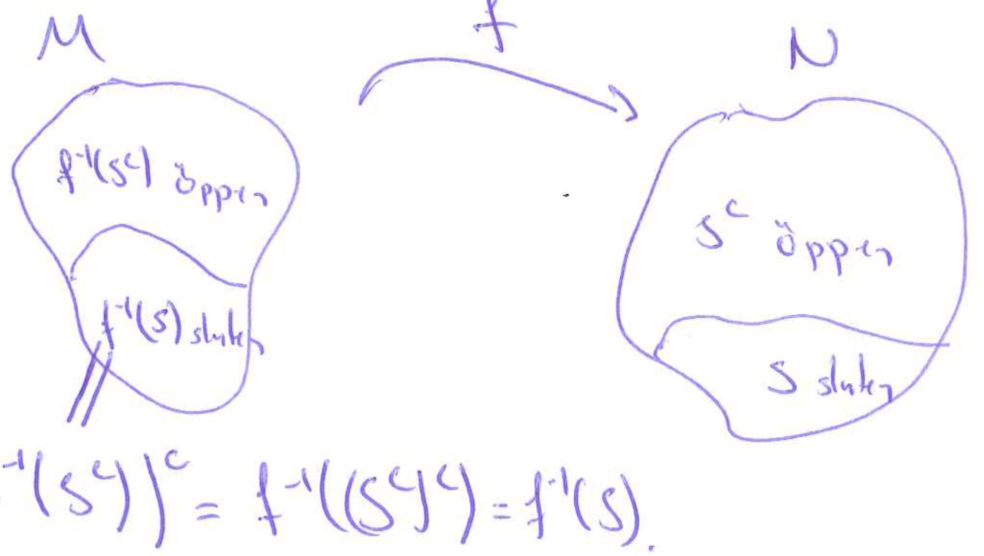
$\Leftarrow$: Antag att inversa bilden av slutna mängder är slutna. Tag en öppen mängd $U \subset N$. Då är U^c sluten i N. Detta ger att

$$(f^{-1}(U))^c = f^{-1}(U^c)$$

är en sluten mängd, varvid $f^{-1}(U)$ är en öppen mängd. Eftersom U var en godtycklig öppen mängd så ger satsen på sidan 8 att f är kontinuerlig.

$\square$

Bild:

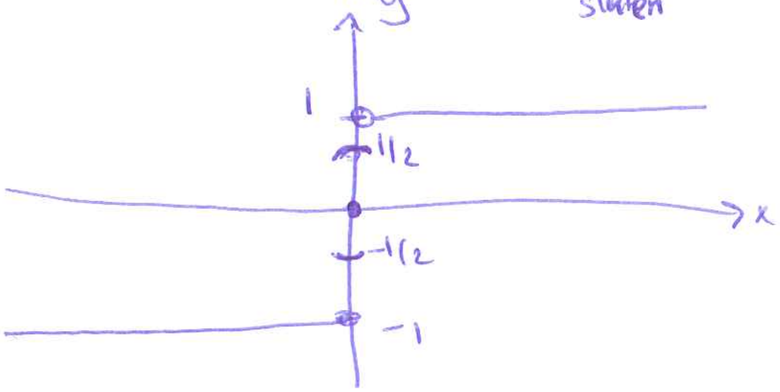


$$(f^{-1}(S^c))^c = f^{-1}((S^c)^c) = f^{-1}(S).$$

Ex:

Signumfunktion är inte kontinuerlig ty

$$\operatorname{sgn}^{-1}\Big(\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{öppen}}\Big) = \underbrace{\{0\}}_{\text{sluten}}.$$



Kom ihåg följande fakta (se föreläsning 2 sidan 50)

(*) Om $K \subset M$ är kompakt i ett metriskt rum M då är K sluten och begränsad.

Anmärkning:

I $\mathbb{R}^n$ så gäller även omvändningen, den så kallade Heine-Borels sats.

Nästa sats säger att kontinuitet bevarar kompakthet.

Sats:

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum och låt $f: M \to N$ vara en kontinuerlig avbildning. Om $K \subset M$ är kompakt så är $f(K) \subset N$ också kompakt.

Bevis:

Låt $\{U_\alpha\}$ vara en öppen övertäckning av $f(K)$. Vi ska hitta en ändlig delövertäckning för att visa kompaktheten. Eftersom f är kontinuerlig så är $f^{-1}(U_\alpha)$ öppen för varje U_α. Då är $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ en öppen övertäckning av K, och eftersom K är kompakt så har denna delövertäckning en ändlig delövertäckning, säg att

$$K \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n}) \quad (*)$$

Eftersom $f(f^{-1}(U)) \subset U \quad \forall U \subset N$ så får vi från $(*)$ att

$$\begin{aligned} f(K) &\subset f\left(f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})\right) = \\ &= f(f^{-1}(U_{\alpha_1})) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_{\alpha_n})) \\ &\subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Därför har vi hitta vår ändliga delövertäckning av $f(K)$. Eftersom $\{U_\alpha\}$ var en godtycklig övertäckning så följer det att $f(K)$ är kompakt

$\square$

Eftersom $f(K)$ är kompakt för varje kompakt så är även $f(K)$ sluten och begränsad. Detta har konsekvenser då vi betraktar kontinuerliga funktioner $f: M \to \mathbb{R}^n$.

Definition: (Begränsad funktion)

Låt $f: M \to \mathbb{R}^n$ vara en funktion definierad på ett metriskt rum M. Vi säger att f är begränsad om

$$|f(x)| \leq C \quad \forall x \in M$$

och någon konstant $C > 0$.

Sats:

Låt (M, d_M) vara ett kompakt metriskt rum och låt $f: M \to \mathbb{R}^n$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.

Bevis:

Enligt satsen på sidan 13 så är $f(M)$ kompakt, och därför sluten och begränsad. ~~Att~~ $f(M)$ är begränsad betyder att det finns en boll $B(p, C)$ kring $f(M)$. Detta betyder att $|f(x)| \leq C$, så f är begränsad.

$\square$

Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då gäller att

$$f([a,b]) = [c,d]$$

Man kan visa att det följer från detta exempel att

- Varje kontinuerlig funktion definierad på ett kompakt intervall har ett minimum och ett maximum.
- Satsen om mellanliggande värde:
  Om $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och k är sådan att $f(a) < k < f(b)$, då finns ett $p \in [a,b]$ så att $f(p) = k$.

Dessa båda satser kan man visa i en mer generell tappning, och det ska vi göra nu.

Sats: (Max-Min Sats)

Låt M vara ett kompakt metriskt rum och låt $f: M \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Låt $C_1 = \sup_{p \in M} f(p)$ och $C_2 = \inf_{p \in M} f(p)$. Då finns det punkter $p, q \in M$ så att $f(p) = C_1$ och $f(q) = C_2$.

Bevis:

Eftersom M är kompakt och f är kontinuerlig så följer att $f(M)$ är sluten och begränsad. Nu följer det från satsen i föreläsning 2 sidan 46 att $C_1 = \sup f(M)$ och $C_2 = \inf f(M)$. $\square$

För att visa satsen om mellanliggande värden i en generell tappning behöver vi veta att kontinuitet bevarar sammanhängande mängder.

Sats:

Låt (M, d_M) och (N, d_N) vara metriska rum och låt $f: M \to N$ vara en kontinuerlig funktion. Om $S \subset M$ är sammanhängande, då är även $f(S)$ sammanhängande.

Bevis:

Antag, för en motsägelse att $f(S)$ inte är sammanhängande, dvs att det finns mängder A och B som är disjunkta och $f(S) = A \cup B$. Låt nu $C = f^{-1}(A) \cap S$ och $D = f^{-1}(B) \cap S$. Då är $C \neq \emptyset$ och $D \neq \emptyset$ och

$$S = C \cup D.$$

Vi ska visa att $C \cap D = \emptyset$, dvs att S är sammanhängande varvid vi får en motsägelse. Det är nu vi ska använda kontinuiteten. Eftersom f är kontinuerlig så är $f^{-1}(\overline{A})$ sluten och $C \subseteq f^{-1}(\overline{A})$, vilket ger att $\overline{C} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$ och $f(\overline{C}) \subseteq \overline{A}$. Men eftersom $f(D) = B$ så är $\overline{A} \cap B = \emptyset$. (vi har ju att $f(\overline{C}) \subseteq \overline{A}$ och $f(D) = B$). Detta ger oss att $\overline{C} \cap D = \emptyset$. På samma sätt så är $C \cap \overline{D} = \emptyset. \Rightarrow C \cap D = \emptyset$.
Därför så är $S = C \cup D$ inte sammanhängande, vilket är en motsägelse

Sats: (Satsen om mellanliggande värden)

Låt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion.

Om $f(a) < f(b)$ och $c \in (f(a), f(b))$ är godtycklig, då finns det ett $x \in (a,b)$ så att $f(x) = c$.

Observation:

Satsen säger att det inte finns några hål/hopp i en kontinuerlig funktion, utan att funktionen antar alla mellanliggande värden på ett intervall.

Anmärkning:

Vi kan byta ut $[a,b]$ mot ett sammanhängande metriskt rum S och ändå visa samma resultat.

Bevis:

Man använder först satsen på sidan 55 i föreläsning 2 för att se att $[a,b]$ är sammanhängande. Efter detta använder man satsen på sidan 16 för att se att $f([a,b])$ är sammanhängande. Sen är det bara att använda satsen på sidan 55 i föreläsning 2 igen för att se att vi får alla värden i intervallet $[f(a), f(b)]$.

$\underset{\text{''}}{[f(a), f(b)]}$

$\square$

Vi har nu sett följande resultat för en kontinuerlig funktion $f: M \to N$ mellan metriska rum:

- Om $K \subset M$ är kompakt $\Rightarrow$ $f(K)$ kompakt
- Om $S \subset M$ är sammanhängande $\Rightarrow$ $f(S)$ är sammanhängande
- Om $U \subset N$ är öppen $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)$ öppen
- Om $S \subset N$ är sluten $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(S)$ sluten.

Vi skulle kunna ställa några frågor till:

1: Om U är öppen $\Rightarrow$ $f(U)$ öppen?

2: Om S är sluten $\Rightarrow$ $f(S)$ sluten?

3: Om B är begränsad $\Rightarrow$ $f(B)$ begränsad?

Varken 1, 2 eller 3 håller generellt, så kom ihåg detta!

Likformig kontinuitet

Låt oss börja med ett inledande exempel.

Ex:

Låt $f(x) = 2x$. Vi ska se att f är kontinuerlig i $p \in \mathbb{R}$. Vi har att $|f(x) - f(p)| = 2|x-p|$. Om vi väljer $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ och då gäller för x med $|x-p| < \frac{\varepsilon}{2}$ att

$$|f(x) - f(p)| = 2|x-p| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Innan vi diskuterar detta exempel så ska vi kolla på definitionen för kontinuitet igen:

Vi säger att f är kontinuerlig om

$$\forall \varepsilon>0 \; \forall x \; \exists \delta>0 \; (\delta \text{ kan bero på } \varepsilon \text{ och } x) \; \forall y : d_M(x,y)<\delta$$

$$\Longrightarrow \qquad (M,d_M),\ (N,d_N)$$

$$d_N(f(x),f(y))<\varepsilon. \qquad (f: M \to N)$$

Det som är speciellt med exemplet på sidan 18 är att δ endast beror på ε och inte punkten där vi kollar kontinuitet. Funktioner som har denna egenskap kallas för likformigt kontinuerliga:

<u>Definition</u>: (Likformigt kontinuitet)

Låt (M,d_M) och (N,d_N) vara metriska rum, och låt $f: M \to N$ vara en funktion. Vi säger att f är <u>likformigt kontinuerlig</u> på M om

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; (\delta \text{ får endast bero på } \varepsilon) \; \forall x\in M \; \forall y\in M : d_M(x,y)<\delta$$

$$\Longrightarrow$$

$$d_N(f(x),f(y))<\varepsilon$$

Anmärkning:

I definitionen för kontinuerlig i en punkt x så kan talet δ bero på både ε och x, medan i likformig kontinuitet så beror δ endast på ε. Det gäller att givet $\varepsilon > 0$ så ska man hitta ett $\delta > 0$ som funkar för alla punkter $x \in M$.

Följande resultat följer direkt från definitionen:

Sats:

Varje likformigt kontinuerlig funktion är kontinuerlig.

Ex:

Låt $f: (0,1) \to (1,\infty)$ vara definierad genom $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi ska visa att f inte är likformigt kontinuerlig på $(0,1)$, men att f är kontinuerlig på $(0,1)$.

Låt oss börja med kontinuiteten. Tag ett godtyckligt $x \in (0,1)$ och ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Tag

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{x}{2}, \frac{\varepsilon x^2}{2}\right\}$$

och tag godtyckligt $y \in (0,1)$. Antag att $|x-y| < \delta$.

Då gäller att eftersom $\delta < \frac{x}{2}$ så är $y > \frac{x}{2}$.

Detta gäller på grund av $|x-y| < \delta$. Vi får därför att

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ x,y>0}}{=} \frac{|x-y|}{xy} \underset{\substack{\uparrow \\ y > \frac{x}{2}}}{<} \frac{2|x-y|}{x^2} < \frac{2\delta}{x^2} < \varepsilon$$

Detta betyder att f är kontinuerlig på $(0,1)$.

Vi ska nu se att f <u>inte</u> är likformigt kontinuerlig.

Men att inte vara likformigt kontinuerlig betyder att

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in (0,1) : |x-y| < \delta \text{ och } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Låt $\varepsilon = 1$ och låt $\delta > 0$ vara godtycklig. Eftersom avståndet mellan punkter i $(0,1)$ är max 1 så kan vi anta att $\delta < 1$. Välj $x = \frac{\delta}{2} \in (0,1)$. Välj sedan $0 < y < \frac{x}{2}$, varvid $y \in (0,1)$. Detta ger att

$$|x-y| = \left|\frac{\delta}{2} - y\right| \underset{x=}{<} \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Vidare så får vi att

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ x,y>0}}{=} \frac{|x-y|}{xy} \underset{\substack{\uparrow \\ |x-y|<x}}{\geq} \frac{x/2}{xy} = \frac{1}{2y} \underset{\substack{\uparrow \\ y \leq \frac{1}{2}}}{\geq} 1$$

ty

$$y < \frac{x}{2} < \frac{\delta}{4} < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Förra exemplet ger ett exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig. Detta betyder att omvändningen av satsen på sidan 20 <u>inte</u> gäller generellt.

Däremot så gäller satsens omvändning på kompakter:

<u>Sats:</u>

Låt (M, d_M) vara ett kompakt metriskt rum och låt (N, d_N) vara ett metriskt rum. Antag att $f: M \to N$ är kontinuerlig, då är f likformigt kontinuerlig på M.

<u>Bevis:</u>

Låt $\varepsilon > 0$. Kontinuiteten för f ger att för varje $x \in M$ att det finns ett $\delta_x > 0$ så att för alla $y \in M$ så att $d_M(x,y) < \delta_x$ implicerar att $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$.

Observera att

$$M \subseteq \bigcup_{x \in M} B(x, \delta_x/2)$$

dvs $\{B(x, \delta_x/2)\}$ är en öppen övertäckning av M.

Eftersom M är kompakt så finns det ett ändligt antal punkter $x_1, \ldots, x_n \in M$ så att

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \delta_{x_k}/2),$$

dvs att det finns en ändlig delövertäckning.

Låt $\delta := \min\{\delta_{x_1}/2, \ldots, \delta_{x_n}/2\}$. Om $x, y \in M$ uppfyller att $d_M(x,y) < \delta$ då kommer $x, y \in B(x_k, \delta_{x_k}/2)$ för något $k = 1, \ldots, n$, eftersom om $x \in B(x_k, \delta_{x_k}/2)$ så är

$$d_M(y, x_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangelolikheten}}}{\leq} d_M(y, x) + d_M(x, x_k) < \delta + \delta_{x_k}/2 \leq$$

$$\leq \delta_{x_k}/2 + \delta_{x_k}/2 = \delta_{x_k}.$$

Alltså om $d_M(x,y) < \delta \Rightarrow x, y \in B(x_k, \delta_{x_k}/2)$. Detta ger att om $d_M(x,y) < \delta$ så får vi att

$$d_N(f(x), f(y)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangelolikheten}}}{\leq} d_N(f(x), f(x_k)) + d_N(f(x_k), f(y))$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Alltså är f likformigt kontinuerlig.

$\square$

Vi ställer oss nu frågan om det finns något sätt att känna igen likformigt kontinuerliga funktioner. För att besvara denna fråga så behöver vi först ett resultat som säger att likformig konvergens bevarar Cauchy följder. Mer precist har vi

Sats:

Låt (M, d_M) och (N, d_N) vara metriska rum och låt $f: M \to N$ vara likformigt kontinuerlig. Om $\{x_n\} \subset M$ är en Cauchy följd, då är $\{f(x_n)\}$ också en Cauchy följd.

Bevis:

Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom f är likformigt kontinuerlig, då finns det ett $\delta > 0$ så att för alla $x, y \in M$ med

(*) $d_M(x,y) < \delta$ så är $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Låt $\{x_n\} \subset M$ vara en Cauchy följd, då kan vi hitta $N \in \mathbb{N}$ så att om $m, n \geq N$ ger att $d(x_m, x_n) < \delta$, varmed

$$d_N(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon.$$

Detta följer från (*) ovan.

$\square$

Kravet på likformig konvergens är viktigt i föregående sats, ty

Ex:

Låt $f:(0,1] \to [1,\infty)$ vara definierad genom $f(x)=\frac{1}{x}$

Då är f kontinuerlig på $(0,1]$ men inte likformigt kontinuerlig, se exemplet på sidan 20.

Följden $\{\frac{1}{n}\} \subset (0,1]$ är Cauchy, men $\{f(1/n)\} = \{n\}$ är inte Cauchy i $(0,1]$.

Nästa sats ger en karaktärisering av likformigt kontinuerliga funktioner.

Sats:

Om $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ är en funktion, då gäller att.

f är likformigt kontinuerlig om och endast om f kan utvidgas till en kontinuerlig funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$, dvs att det finns $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig och $g|_{(a,b)} = f$.

Anmärkning:

Vi ska visa satsen i denna reella sättning, men det finns en mer generell formulering:

Låt (M, d_M) vara ett metriskt rum och låt (N, d_N) vara ett fullständigt metriskt rum. Antag att $X \subset M$ uppfyller att $\overline{X} = M$, dvs att X är tätt i M, och låt $f: X \to N$ vara en likformigt kontinuerlig funktion. Då kan vi utvidga f till en kontinuerlig, t.o.m. likformigt kontinuerlig, funktion $M \to N$.

(Om M är kompakt så får vi en mer exakt utvidgning av satsen).

Bevis:

$\Leftarrow$: Varje kontinuerlig funktion på en kompakt är likformigt kontinuerlig enligt satsen på sidan 22.

$\Rightarrow$: Antag att $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig på (a,b). Vi ska visa hur man utvidgar f till a, medan utvidgningen till b innehåller liknande argument.

Antag att $\{x_n\} \subset (a,b)$ är en följd som är konvergent, säg att $x_n \to a$. Eftersom $\mathbb{R}$ är ett fullständigt metriskt rum så är även $\{x_n\}$ en Cauchy följd. Satsen på sidan 24 ger att $\{f(x_n)\}$ också är en Cauchy följd. Igen kan vi använda att $\mathbb{R}$ är ett fullständigt metriskt rum för att se att även $\{f(x_n)\}$ är konvergent. Alltså det finns ett tal L så att $f(x_n) \to L$. Låt $\{y_n\} \subset (a,b)$ vara en följd så att $y_n \to a$. Då har vi att

$$y_n - x_n \to a - a = 0$$

Igen använder vi den likformiga kontinuiteten för att se att $\{f(y_n)\}$ är konvergent, enligt samma argument som ovan. Detta ger att

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(f(y_n) - f(x_n)\right) + \lim_{n\to\infty} f(x_n) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kontinuitet}}}{=} f\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) - f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \lim f(x_n) = f(a) - f(a) + L = L.$$

Varje följd $\{z_n\}$ i (a,b) som konvergerar mot a kommer att generera en konvergent följd $f(z_n) \to L$.
Definiera $f(a) := L$, varvid f blir kontinuerlig i a, ty

$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$ för varje följd $\{z_n\} \subset (a,b)$ som konvergerar mot a. Liknande argument ger utvidgningen mot b.

$\square$.

Ex:

Betrakta $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Då är f kontinuerlig på $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ty $f(0)$ är ej definierad. Kan vi hitta en utvidgning till $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ för $f(x)$? Eftersom

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

så definierar vi $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, varvid

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Enligt föregående sats så är f likformigt kontinuerlig.

Ex:

Funktionen $f(x) = x\sin(1/x)$ är också likformigt kontinuerlig eftersom $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar, man har att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Ex:

Man kan även använda satsen för att visa att $f(x) = \sin(1/x)$ inte är likformigt kontinuerlig.

Lipschitz kontinuitet

Lipschitzkontinuitet kan användas för att visa likformig konvergens, men låt oss börja med en definition.

Definition: (Lipschitzkontinuitet)

Låt (M, d_M) och (N, d_N) vara metriska rum. En funktion $f: M \to N$ sägs vara Lipschitz om det finns en konstant $C>0$ så att

$$d_N(f(x), f(y)) \le C\cdot d_M(x,y) \quad \forall x,y\in M.$$

Geometrisk tolkning i $\mathbb{R}$:

Låt $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ vara en funktion, och betrakta Lipschitzvillkoret

$$|f(x)-f(y)| \le C\cdot|x-y|$$

$$\iff$$

$$\left|\underbrace{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}}\right| \le C$$

Detta är lutningen för linjen genom $(x,f(x))$ och $(y,f(y))$

Alltså är $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ Lipschitz om och endast om lutningen av alla linjesegment mellan två punkter på grafen $y=f(x)$ över (a,b) är begränsad av något tal C.

Ex:

Låt $f(x)=ax+b$. Då är f Lipschitz på $\mathbb{R}$, ty

$$|f(x)-f(y)| = |ax+b-ay-b| = |a||x-y| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Ex:

Låt $f(x)=x^2$. Då är f Lipschitz på varje begränsad mängd $S\subset\mathbb{R}$. Säg att $|x|\le M$ $\forall x\in S$. Då gäller att

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| \le |x+y||x-y| \underset{\substack{\uparrow \\ x,y\in S \\ |y|,|x|\le M}}{\le} 2M|x-y| \quad \forall x,y\in S$$

Alltså f Lipschitz på S, men däremot <u>inte</u> på $\mathbb{R}$.

Ex:

Eftersom man kan visa att

$$|\sin x - \sin y| \le |x-y| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

så är $f(x)=\sin x$ Lipschitz på $\mathbb{R}$.

Sats:

Varje Lipschitzkontinuerlig funktion är likformigt kontinuerlig.

Bevis:

Låt (M, d_M) och (N, d_N) vara metriska rum, och antag att $f: M \to N$ är Lipschitz, dvs

$$d_N(f(x), f(y)) \le C d_M(x,y) \quad \forall x,y \in M$$

för något C. Låt $\varepsilon > 0$ och låt $\delta = \varepsilon / C$. Då gäller för alla $x, y \in M$ med $d_M(x,y) < \delta$ att

$$d_N(f(x), f(y)) \le C \cdot d_M(x,y) < C \cdot \delta = C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

$\square$

Ex:

Låt $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = \sqrt{x}$. Eftersom f är kontinuerlig på $[0,2]$ så är f även likformigt kontinuerlig. (f är ju definierad på en kompakt). Däremot så finns inget C så att

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le C \cdot |x-y|$$

Alltså är f inte Lipschitz. Detta visar att omvändningen av satsen inte gäller.

Följd:

Varje Lipschitzfunktion är kontinuerlig.

Bevis:

Lipschitz $\Rightarrow$ Likformigt kontinuerlig $\Rightarrow$ kontinuerlig.

$\square$