Föreläsning 5

I denna föreläsning ska vi diskutera deriverbarhet för funktioner. Låt oss börja med en definition.

Definition: (Deriverbar)

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara ett öppet intervall. Vi säger att en funktion $f: I \to \mathbb{R}$ är deriverbar i $x \in I$ om

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar. I så fall kallas detta gränsvärde för derivatan av f i x och skrivs $f'(x)$.

Om f är deriverbar i varje punkt i I, så kallas f deriverbar på I.

Ex:

Låt $f(x) = x^3$ och antag att $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tag godtycklig $x = a$ i $\mathbb{R}$. Då gäller att

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3a^2 + 3ah + h^2)}{\cancel{h}} = 3a^2$$

Eftersom a är godtycklig så drar vi slutsatsen att f är deriverbar på $\mathbb{R}$, och $f'(x) = 3x^2$ är derivatan för f.

Sats:

Antag att $f: I \to \mathbb{R}$ är en funktion definierad på ett öppet intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Om f deriverbar i $x = a \in I$, då är f kontinuerlig i $x = a$.

Bevis:

Antag att f är deriverbar i $x=a$. Vi ska visa att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Vi har att

$$\lim_{x \to a} f(x) \underset{\substack{h = x-a \\ x \to a \Rightarrow h \to 0}}{=} \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} \Bigg(\underbrace{f(a)}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} \Bigg) =$$

$$= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Om vi följer denna kedja av likheter så ser vi att $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, dvs f är kontinuerlig i $x = a$.

$\square$

Ex:

Betrakta $f(x) = |x|$. Då är f kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Om vi betraktar differenskvoten för $x=0$ så får vi:

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \operatorname{sgn}(h) = \begin{cases} 1 & h>0 \\ 0 & h=0 \\ -1 & h<0 \end{cases}$$

Vi har tidigare sett att gränsvärdet för signumfunktionen i origo inte existerar, så f är inte deriverbar i $x=0$. Detta betyder att satsen på sidan 2 inte har någon omvändning, dvs

$$f \text{ kontinuerlig i } x \not\Rightarrow f \text{ deriverbar i } x.$$

Vanliga aritmetiska regler gäller för deriverbara funktioner:

Sats:

Om $f: I \to \mathbb{R}$ och $g: I \to \mathbb{R}$ är deriverbara på ett öppet intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Då är

a) $f+g$ deriverbar på I

b) $f \cdot g$ deriverbar på I

c) Om $g \neq 0$, då är f/g deriverbar.

Anmärkning:

Man kan även härleda formler för derivatan för $f \cdot g$ och $\frac{f}{g}$:

Produktregeln: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Kvotregeln: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

För summan av funktioner så använder man att deriveringsoperatorn är linjär. Kom ihåg att en avbildning $T: V \to W$ mellan vektorrum V och W är linjär om

$$T(v+w) = T(v) + T(w) \quad \forall v, w \in V$$

och

$$T(kv) = kT(v) \quad \forall v \in V \ \forall k \in \mathbb{R}.$$

Låt $\mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vara mängden av funktioner och låt $\mathrm{Der}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vara mängden av deriverbara funktioner på $\mathbb{R}$. Då är $\mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ och $\mathrm{Der}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ båda vektorrum och avbildningen

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ni f \longmapsto f' \in \mathrm{Der}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

är en linjär avbildning.

Detta betyder alltså att

$$(f+g)' = f' + g' \quad \forall f,g \in Der(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

och

$$(k \cdot f)' = k \cdot f' \quad \forall k \in \mathbb{R} \ \forall f \in Der(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Vi ska nu sträva efter ett bevis för den så kallade kedjeregeln. Kedjeregeln är en formel för hur man deriverar sammansättningar av funktioner. En viktig ingrediens i beviset av kedjeregeln är följande sats.

Sats: (Carathéodorys sats)

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara ett intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ en funktion och $c \in I$ en punkt. Då är f deriverbar i c om och endast om det finns en funktion $\varphi: I \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig i c och uppfyller att

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) \quad \forall x \in I$$

och $\varphi(c) = f'(c)$.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att $f'(c)$ existerar. Definiera $\varphi : I \to \mathbb{R}$ genom

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & ; x \neq c, x \in I \\ f'(c) & ; x = c. \end{cases}$$

Eftersom $\lim_{x \to c} \varphi(x) = \varphi(c)$ så är φ kontinuerlig i $x=c$.

Om $x = c$ så är $\varphi(c) = f'(c)$ och

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c)$$

är noll i både VL och HL. Om $x \neq c$ så får vi att

$$(x-c)\varphi(x) \underset{\uparrow}{=} \cancel{(x-c)} \cdot \frac{f(x)-f(c)}{\cancel{x-c}} = f(x)-f(c).$$

enligt def av φ.

Detta avslutar denna implikation.

$\Leftarrow$: Antag att $\varphi : I \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $x=c$ och att

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) \quad \forall x \in I.$$

Dela med $(x-c) \neq 0$, och låt $x \to c$:

$$\lim_{x \to c} \varphi(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$\Leftrightarrow$ φ kontinuerlig i $x=c$

$$\varphi(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Detta betyder att f är deriverbar i $x=c$ och $f'(c) = \varphi(c)$. $\square$

Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = x^3$.
För godtyckligt $c \in \mathbb{R}$ så gäller att

$$f(x) - f(c) = x^3 - c^3 = (x^2 + cx + c^2)(x - c)$$

Låt $\varphi(x) = x^2 + cx + c^2$. Då uppfyller $\varphi(x)$ Carathéodorys sats, så vi drar slutsatsen att f är deriverbar i c och att $f'(c) = \varphi(c) = c^2 + c^2 + c^2 = 3c^2$.

Vi ska nu använda Carathéodorys sats för att visa kedjeregeln:

Sats: (Kedjeregeln)
Låt $I, J \subseteq \mathbb{R}$ vara intervall. Låt $g: I \to \mathbb{R}$ och $f: J \to \mathbb{R}$ vara funktioner så att $f(J) \subseteq I$, och låt $c \in J$.
Om f är deriverbar i $x = c$ och om g är deriverbar i $f(c)$, då är $g \circ f$ deriverbar i c och

$$(g \circ f)' = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Bevis:

Eftersom $f'(c)$ existerar så implicerar Carathéodorys sats att det finns en funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ så att φ är kontinuerlig i c och

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) \quad \forall x \in J.$$

så att $\varphi(c) = f'(c)$. Vidare, eftersom $g'(f(c))$ existerar så finns det en funktion $\psi : I \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig i $f(c)$ och så att

$$(*) \qquad g(y) - g(f(c)) = \psi(y)(y - f(c)) \quad \forall y \in I.$$

med $\psi(f(c)) = g'(f(c))$. Eftersom $f(J) \subseteq I$ så kan vi välja $y = f(x)$ i $(*)$:

$$(**) \qquad g(f(x)) - g(f(c)) = \psi(f(x))(f(x) - f(c))$$

Eftersom $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$ så får vi $(**)$:

$$g(f(x)) - g(f(c)) = \psi(f(x))\left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c}(x-c)\right) =$$

$$= \psi(f(x)) \cdot \varphi(x) \cdot (x-c) \quad \forall x \in I \text{ och } f(x) \in J.$$

Eftersom $\psi(f(x)) \cdot \varphi(x)$ är kontinuerlig i $x = c$, så ger Carathéodorys sats att $\psi(f(c)) \cdot \varphi(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

Detta avslutar beviset.

$\square$

Ex:

Eftersom $\frac{d}{dx}|x| = \text{sgn}(x)$ för $x \neq 0$ så får vi enligt kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}|x^2+1| = \text{sgn}(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1) = \text{sgn}(x^2+1) \cdot 2x.$$

Definition: (Lokalt maximum)

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Vi säger att f har ett lokalt maximum i $x = c \in I$ om det finns en omgivning V av c så att $f(x) \leq f(c)$ för alla $x \in V \cap I$.

Definition: (Lokalt minimum)

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Vi säger att f har ett lokalt minimum i $x = c \in I$ om det finns en omgivning V av c så att $f(c) \leq f(x)$ för alla $x \in V \cap I$.

Definition: (Lokal extrempunkt)

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion definierad på ett intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Vi säger att f har en lokal extrempunkt i $x = c \in I$ om c är ett lokalt maximum eller lokalt minimum.

Följande sats är förmodligen känd från tidigare analyskurser.

Sats:

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara ett intervall och låt c vara en inre punkt för I. Antag att $f: I \to \mathbb{R}$ är en funktion med en lokal extrempunkt i $x = c$. Om $f'(c)$ existerar, då är $f'(c) = 0$.

Observation:

Om vi stryker att c ska vara en inre punkt så gäller inte satsen. T.ex om $f(x) = x$ där $f: [0,1] \to \mathbb{R}$. Då är $f(0)$ ett minimum och $f(1)$ ett maximum på $[0,1]$, men $f'(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ och inte $f'(x) = 0$ för $x=0$ el $x=1$.

Följd:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig på ett intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Antag att c är en inre punkt till I och antag att f har en lokal extrempunkt i c. Då existerar antingen $f'(c)$ inte eller så är $f'(c) = 0$.

Ex:

Låt $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = |x|$. Då är 0 en inre punkt för $[-1,1]$ och f har ett lokalt minimum i 0. Observera att $f'(0)$ inte existerar.

Sats: (Generaliserade medelvärdessatsen)

Om f och g är reella funktioner på $[a,b]$, dvs $g, f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Antag att f och g är deriverbara på (a,b). Då finns det en punkt $c \in (a,b)$ så att

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$$

En följd till denna sats är den medelvärdessats som ni har stött på tidigare

Följd: (Medelvärdessatsen)

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig och att f är deriverbar på (a,b). Då finns det ett $c\in(a,b)$ så att

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Bevis:

Låt $g(x)=x$ i den generaliserade medelvärdessatsen. Då är $g'(c)=1$ och $g(b)=b$ och $g(a)=a$, vilket ger att

$$(f(b)-f(a))\cdot 1=(b-a)\cdot f'(c)$$

D.

Kom ihåg att en funktion $f:I\to\mathbb{R}$ sägs vara växande på intervallet I om $x_1<x_2$ ger att $f(x_1)\leq f(x_2)$ för $x_1,x_2\in I$. Vidare så säger vi att f är avtagande på I om $-f$ är växande på I.

Vi får då följande följd till medelvärdes-satsen.

Följd:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara deriverbar på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$.
Då gäller att

a) f är växande på $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

b) f är avtagande på $I \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

Bevis:

a) $\Leftarrow$: Antag att $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. Låt $x_1, x_2 \in I$ och antag att $x_1 < x_2$. Använd nu medelvärdessatsen på intervallet $[x_1, x_2]$, varvid vi kan hitta en punkt $c \in (x_1, x_2)$ så att

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \cdot \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Alltså $f(x_2) \leq f(x_1)$, dvs f växer på I ty x_1 och x_2 var godtyckliga punkter i I.

$\Rightarrow$: Antag att f är deriverbar och växande på I.
Tag $x \neq c \in I$. Då är $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ ty

1) om $x < c$ då är $x-c<0$ och $f(x)-f(c) \leq 0$ (f växande)

så $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

2) om $x > c$ då är $x-c > 0$ och $f(x)-f(c) \geq 0$ (f växande)

så $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

Detta ger att

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

så $f'(c) \geq 0$.. Eftersom $c \in I$ var godtycklig så kommer $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Beviset av (b) är liknande. D.

Kom ihåg satsen om mellanliggande värden för kontinuerliga funktioner. Denna sats säger grovt talat att om $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$, dvs om $f(a) < k < f(b)$ då finns ett $c \in [a,b]$ så att $f(c) = k$.

Trots att derivatan av en funktion inte behöver vara kontinuerlig så har även derivatan denna egenskap:

<u>Sats:</u> (Darboux sats)

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är deriverbar och att $f'(a)<k<f'(b)$. Då finns en punkt $c\in(a,b)$ så att $f'(c)=k$.

<u>Bevis:</u>

Definiera $g(t)=f(t)-kt$. Då är $g'(t)=f'(t)-k$, varvid $g'(a)=f'(a)-k<0$ eftersom $f'(a)<k$. Detta betyder att $g(s)<g(a)$ för något $s\in(a,b)$ eftersom g avtar i en omgivning till a. Vidare så har vi att $g'(b)=f'(b)-k>0$ eftersom $k<f'(b)$. Detta ger att $g(t)<g(b)$ för något $t\in(a,b)$. Därför måste g anta ett minimum på $[a,b]$,

x	a			b
g'	$-$			$+$
g	$\searrow$		$\rightarrow$	$\nearrow$

så det finns ett $c\in[a,b]$ så att $g'(c)=0$, dvs $0=g'(c)=f'(c)-k \Leftrightarrow f'(c)=k$ $\square$

Ex:

Låt $g:[-1,1] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ -1 & ; \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Detta är en restriktion av signumfunktionen, dvs $g(x) = \mathrm{sgn}|_{[-1,1]}(x)$. Det är klart att g inte uppfyller satsen om mellanliggande värden, eftersom g inte är kontinuerlig. Nu ger Darboux sats att det inte finns en funktion f så att $f'(x) = g(x)$ för alla $x \in [-1,1]$. Med andra ord, g är inte derivatan av någon annan funktion på $[-1,1]$.

Vi ska nu studera gränsvärden ett tag igen.
Vi ska kolla på några extremfall för

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Om både $\lim_{x\to a} f(x) = A$ och $\lim_{x\to a} g(x) = B$ existerar

så blir

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Vi ska kolla på fallen då

1) $A=B=0$ (Detta skriver vi som $\left[\frac{0}{0}\right]$)

2) $B = \pm\infty$ (Detta skriver vi som $\left[\frac{A}{\pm\infty}\right]$ där A kan vara vad som helst)

Vi måste förstås göra några antaganden för att kunna säga något om gränsvärdet $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ex:

Låt $f(x) = kx$ och $g(x) = x$. Då är

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x} = \lim_{x\to 0} k = k.$$

Detta betyder att gränsvärdet kan existera trots att vi har en $\left[\frac{0}{0}\right]$ situation.

Sats: (L'Hospitals regel)

Antag att $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ och $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ är deriverbara och att $g'(x)\neq 0$ för alla $x\in(a,b)$ med $-\infty\le a<b\le+\infty$. Antag vidare att

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

Om 1) $f(x)\to 0$ och $g(x)\to 0$ då $x\to a$

eller 2) $g(x)\to\infty$ då $x\to a$

då gäller att

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

Vi bryr oss inte om beviset utan vi kollar på några exempel istället.

Ex:

Låt $f(x)=\sin x$ och $g(x)=x$. Då är f och g deriverbara. Vidare så gäller att $f(x)\to 0$ och $g(x)\to 0$ då $x\to 0$.

Detta ger att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\substack{\uparrow\\ \text{L'Hospital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Ex:

Vi vill beräkna $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Både $\sin x$ och $\sqrt{x}$ är kontinuerliga på $(0, \infty)$. Vi får att

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow \atop \text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{x}\cos x = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Ex:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow \atop \text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow \atop \text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Man måste förstås se till i varje steg att man verkligen kan använda L'Hospitals regel.

Ex:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow \atop \text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ex:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\cos x}_{\to 1} = \underline{1}.$$

Ex:

Vi vill beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

Detta gränsvärde är på formen $\infty - \infty$ och inte $\left[\frac{0}{0}\right]$ eller $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$. Däremot så kan vi göra en omskrivning:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

Denna funktion är på formen $\left[\frac{0}{0}\right]$ då $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x - x}{x\sin x}\right)\left[\frac{0}{0}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \underline{\underline{0}}$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x \; [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \; \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

L'Hospital

Ex:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \; [0^0] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

Eftersom $y \mapsto e^y$ är kontinuerlig så gäller att

$$\lim_{y\to a} e^y = e^{\lim_{y\to a} y} = e^a$$

Detta ger att

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} \underset{\uparrow}{=} e^0 = \underline{1}.$$

Ex överst på denna sida.

Ex:

$$(*) \quad \lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x \; [1^\infty] = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+1/x)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+1/x)}$$

Vidare så har vi att

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{\frac{1}{x}} \; \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}} =$$

L'Hospital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$$

Använder vi kontinuitet hos e^y så får vi att

$$\lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln(1+1/x)} = e^1 = \underline{e}.$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0^+} (1+1/x)^x \,[\infty^0] = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(1+1/x)}.$$

Detta ger att

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+1/x} = 0.$$

Använder vi detta med kontinuiteten hos e^y så får vi att

$$\lim_{x\to 0^+} (1+1/x) = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(1+1/x)} = e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

Vissa gånger är L'Hospitals regel inte brukbar, och ibland blir L'Hospitals regel väldigt svår att använda, dvs deriveringarna blir svåra. Ett exempel är gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x \arctan x}$$

där derivatorna blir relativt jobbiga. I dessa fall så kan man istället använda sig av Taylors formel.

Sats: (Taylors formel)

Antag att $f: I \to \mathbb{R}$ är en funktion definierad på ett öppet intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ och antag att $a \in I$. Antas vidare att f är deriverbar $n+1$ gånger och att dessa derivator är kontinuerliga. Då finns en boll $B(a,r)$ så att om $x \in B(a,r)$ så är

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} +$$

$$+ (x-a)^{n+1} \cdot H(x)$$

där $H(x)$ är en begränsad funktion på $B(a,r)$.

Anmärkning:

Om derivatorna är kontinuerlig så brukar vi säga att funktionen är kontinuerligt deriverbar och brukar skriva att $f \in C^{n+1}(I)$.

Ex:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Vi ska nu använda Taylors formel för att beräkna gränsvärden. Man kan använda Taylors formel för andra saker, bland annat approximation av funktioner.

Ex:

Vi ska beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ med hjälp av Taylors formel. Vi har att $\sin x = x + x^3 \cdot H(x)$ där H är en begränsad funktion. Detta ger att

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^3 H(x)}{x} = \lim_{x \to 0} 1 + x^2 H(x) = 1 + 0 \cdot H(0) = 1$$

eftersom H är begränsad.

Ex:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^4 H(x)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + x^5 G(x)\right)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + x^5 H(x) + \frac{x^3}{6} - x^5 G(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2} + x^2 H(x) + \frac{1}{6} - x^2 G(x)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \underbrace{0 \cdot H(0)}_{\to 0} - \underbrace{0\, G(0)}_{\to 0} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\arctan x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+x^3H(x)\right) - \left(x+x^3G(x)\right) - \left(1-\frac{x^2}{2}+x^4I(x)\right)}{x^2 - x^6J(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + x^3H(x) + x^3G(x) + \frac{x^2}{2} + x^4 I(x)}{x^2 - x^6J(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + xH(x) + xG(x) + x^2I(x)\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - x^4J(x)\right)} =$$

$$= \frac{1 + 0H(0) + 0G(0) + 0I(0)}{1 - 0J(0)} = \underline{\underline{1}}$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x \arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^4H(x)\right)}{\left(x+x^3G(x)\right)\left(x+x^3I(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + x^4H(x)\right)\right)}{x^2 + x^4\left(I(x)+G(x)\right) + x^6G(x)I(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + x^4H(x) + \left(-\frac{x^2}{2} + x^4H(x)\right)J(x)}{x^2 + x^4\left(I(x)+G(x)\right) + x^6G(x)I(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + 0}{1 + 0} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Flera variabler

Vi ska nu lämna funktioner i en variabel för att betrakta flera variabler istället. Vi ska prata om så kallade partiella derivator samt Jacobimatrisen.

Definition: (Partiella derivator)

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så definieras den j:te partiella derivatan i punkten $x \in \mathbb{R}^n$ som derivatan av f med avseende på variabeln x_j och håll de andra variablerna konstanta. Vi skriver den j:te partiella derivatan i $x \in \mathbb{R}^n$ som $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.

Observation:

Fixera $x \in \mathbb{R}^n$. Vi vill nu uttrycka exempelvis $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$. Låt $g(t) = f(t, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Då är

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = g'(x)$$

Observation:

Om $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ är den

j:te position

j:te basvektorn i standardbasen för $\mathbb{R}^n$, så är

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

Anmärkning:

Partiella derivator är strikt envariabliga företeelser i en flervariabls miljö, och partiella derivator uppfyller inte sådant som en "riktig" derivata förutsätts uppfylla. T.ex, bara för att en funktion har partiella derivator så behöver den inte vara kontinuerlig.

Ex:

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ har partiella derivator men är inte kontinuerlig.

Det verkar som att partiella derivator är "fel" objekt att studera.

<u>Q:</u> Vad är "rätt" objekt?

För att formulera de korrekta objekten att studera behöver vi först några definitioner.

<u>Definition:</u> (Gradient)

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en funktion så är dess <u>gradient</u> i punkten $x \in \mathbb{R}^n$ vektorn

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

<u>Definition:</u> (Jacobimatris).

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en avbildning. Då är $f = (f_1, \dots, f_m)$ där $f_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är funktioner. Vi definierar f:s <u>Jacobimatris</u> i $x \in \mathbb{R}^n$ att vara följande $m \times n$-matris:

$$J(f)(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Om $m=n$ så betraktar vi även ibland Jacobimatrisens determinant, den så kallade <u>Jacobideterminanten</u>.

<u>Observation:</u>

$$J(f)(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{bmatrix}$$ Radvektorer.

<u>Definition:</u> (Totalderivata)

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en avbildning. Definiera en linjär avbildning $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, där $x \in \mathbb{R}^n$, genom

$$f'(x)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{verkar på}}}{.}v = \underbrace{\underbrace{\big(J(f)(x)\big)}_{m\times n}\underbrace{v}_{n\times 1}}_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m.$$

Vi kallar denna matrisavbildning för f:s <u>totalderivata</u> i x.

Observation:

I en variabel så ges Jacobimatrisen för $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ av

$$J(f)(x) = \left[\frac{df}{dx}(x)\right] \cong \frac{df}{dx}(x)$$

Totalderivatan för f i punkten $x \in \mathbb{R}$ ges av den linjära avbildningen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på formen

$$f'(x) \cdot t = \frac{df}{dx}(x) \cdot t$$

Det rätta objektet är differentierbarhet:

Definition: (Differentierbar)

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en avbildning. Vi säger att f är differentierbar i punkten $x \in \mathbb{R}^n$ om det finns en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och en avbildning $R: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så att

1) $f(x+h) = f(x) + T(h) + |h| R(h)$

Rest.

2) $\lim_{h \to 0} R(h) = 0$

Detta är rätt objekt att studera ty följande sats gäller:

Sats:

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar i $x \in \mathbb{R}^n$, då är f kontinuerlig i x.

Bevis:

Vi måste använda följande resultat om linjära avbildningar

- Om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär, då är $T(0)=0$.

Vi ska visa att $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$, för då är f kontinuerlig i x. Vi har att

$$\lim_{y\to x} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ är diff.bar i } x}}{=} \lim_{h\to 0}\left(f(x) + T(h) + |h| R(h)\right)$$

där $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär och $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$.

Detta ger att

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x) + T(h) + |h| R(h)\right) = f(x) + T(0) + \lim_{h\to 0} |h| R(h) =$$

$$= f(x) + 0 + |0| \cdot 0 = f(x).$$

Alltså är f kontinuerlig i x.

$\square$

Eftersom differentierbarhet var rätt objektet att studera, vore det bra om detta sammanfaller med deriverbarhet i en variabel, där vi redan har att deriverbarhet implicerar kontinuitet. Det visas sig att dessa är begrepp är samma sak i en variabel:

<u>Sats:</u>

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Då är f deriverbar i $x \in \mathbb{R}$ om och endast om f är differentierbar i x.

Innan vi går vidare med beviset så låt oss se vad differentierbarhet betyder i $\mathbb{R}$:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $x \in \mathbb{R}$ om det finns en linjär avbildning $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och en funktion $R: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att

1) $f(x+h) = f(x) + T(h) + |h|\, R(h)$

2) $\lim_{h \to 0} R(h) = 0$.

En linjär avbildning $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $T(h) = kh$ för något $k \in \mathbb{R}$.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att f är deriverbar i x med derivata i denna punkt $\frac{df}{dx}(x) = t$. Definiera en linjär avbildning $T = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom $T(h) = t \cdot h$. För $h \neq 0$, definiera

$$R(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - th}{h} \cdot \frac{h}{|h|}$$

Då är

$$f(x) + T(h) + |h| R(h) = f(x) + th + \cancel{|h|} \cdot \left(\frac{f(x+h) - f(x) - th}{\cancel{h}} \right) \cdot \frac{\cancel{h}}{\cancel{|h|}}$$

$$= f(x+h).$$

Vidare så är

$$\lim_{h \to 0} R(h) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \underbrace{- t}_{\to -t} \cdot \underbrace{\frac{h}{|h|}}_{\text{begränsad}} \overset{t = f'(x)}{=} 0.$$

Alltså är f differentierbar i x.

$\Leftarrow$: Antag att f är differentierbar i x. Vi har att

$$f(x+h) - f(x) = T(h) + |h| R(h)$$

där $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är linjär och $R(h) \to 0$ då $h \to 0$. Detta ger att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{T(h) + |h| R(h)}{h} \underset{T(h) = t \cdot h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{th + |h| R(h)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} t + \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\text{begränsad}} \overset{\to 0}{R(h)} = t + 0 = t.$$

Alltså är f deriverbar i x och $\frac{df}{dx}(x) = t$.

$\square$

Som vi såg ovan så ges avbildningen $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ av derivatan av f, så länge f var differentierbar. Detta gäller även i högre dimensioner:

Sats:

Låt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Antag att f är differentierbar i $x \in \mathbb{R}^n$. Då existerar Jacobimatrisen $J(f)(x)$, och vidare så ges den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i definitionen av differentierbarhet av totalderivatan, dvs $T = f'(x)$.

Bevis:

Så antag att f är differentierbar i $x \in \mathbb{R}^n$. Eftersom $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär så finns det en matris M så att $T(x) = Mx$. Om $e_1, \ldots, e_n$ är standardbasen för $\mathbb{R}^n$ så består M:s j:te kolonn av koordinaterna för $T(e_j)$. Eftersom totalderivatan ges av multiplikation med $J(f)(x)$

, i den mån $J(f)(x)$ existerar, och $J(f)(x)$:s j:te kolonn består av de partiella derivatorna $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$.

så är det tillräckligt att visa att

1/ alla $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ existerar

2/ $T(e_j) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

För $\underset{\mathbb{R}}{h} \neq 0$ så har vi att

$$f(x+he_j) = f(x) + T(he_j) + |he_j| R(he_j) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ linjär}}}{=} f(x) + hT(e_j) + |h| R(he_j)$$

Detta ger att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_j) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hT(e_j) + |h| R(he_j)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}T(e_j)}{\cancel{h}} + \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\text{begränsad}} \underbrace{R(he_j)}_{\to 0} = T(e_j) + 0 = T(e_j)$$

Detta betyder att $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ existerar och att $T(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.

$\square$

Trots att de partiella derivatorna inte är rätt objekt att studera, så kan man ställa vissa krav på de partiella derivatorna så att vi får differentierbarhet:

Sats:

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har kontinuerliga partiella derivator, då är f differentierbar.

Vi avslutar med en flervariablig kedjeregel.

Sats: (Kedjeregeln)

Antag att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ är differentierbara i $x \in \mathbb{R}^n$ respektive $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$. Då är $g \circ f$ differentierbar i x och $(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x)$.

Anmärkning:

$(g \circ f)'(x) = g'(y) f'(x)$ betyder att $J(g \circ f)(x) = J(g)(y) \, J(f(x))$

Beviset innehåller, till slut, ett kompakthetsargument. Beviset är relativt långt, så ni får ta det lugnt när ni läser det så att ni förstår allt.

Bevis:

Eftersom f och g är differentierbara så gäller att

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + |h| R_1(h)$$
$$g(y+k) = g(y) + S(k) + |k| R_2(k)$$

där $y = f(x)$ och $\lim_{h \to 0} R_1(h) = 0$ och $\lim_{k \to 0} R_2(k) = 0$.

Låt $H = g \circ f$. Vi måste visa att

$$H(x+h) = H(x) + S \circ T(h) + |h| R_3(h)$$

där $\lim_{h \to 0} R_3(h) = 0$. Detta visar i så fall att $g \circ f$ är differentierbar,

och eftersom $T = f'(x)$ och $S = g'(y)$ så får vi även att $(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x)$.

Låt oss börja med självaste beviset. Vi har att

$$(*)\ H(x+h) = g(f(x+h)) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ differentierbar}}}{=} g(f(x) + \underbrace{T(h) + |h| R_1(h)}_{\substack{\text{låt detta vara } k. \\ \text{Obs: } k \to 0 \text{ om } h \to 0}}) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ y = f(x)}}{=} g(y+k) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ differentierbar}}}{=} \overbrace{g(y)}^{H(x)} + S(k) + |k| R_2(k)$$

Vi måste nu undersöka $S(k)$ och $|k| R_2(k)$.

Vi får att

$$(**)\ S(k) = S(T(h) + |h|\, R_1(h)) \underset{\substack{\uparrow \\ S \text{ linjär}}}{=} S(T(h)) + S(|h| R_1(h)) =$$

$$= S(T(h)) + |h|\, S(R_1(h)) = S\circ T(h) + |h| S(R_1(h))$$

Vidare så får vi att

$$(***)\ |k|\, R_2(k) = |T(h) + |h|\, R_1(h)|\, R_2(k) =$$

$$= \left|\frac{|h|}{|h|} T(h) + |h| R_1(h)\right| R_2(k) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ linjär}}}{=} \left| |h|\, T\left(\frac{h}{|h|}\right) + |h| R_1(h)\right| R_2(k)$$

$$= |h| \left| T\left(\frac{h}{|h|}\right) + R_1(h)\right| R_2(k).$$

Låt nu $R_3(h) = \left|T\left(\frac{h}{|h|}\right) + R_1(h)\right| R_2(k) + S(R_1(h))$

Använd nu $(**)$ och $(***)$ i $(*)$ och gör substitution med $R_3(h)$. Då får vi att

$$H(x+h) = H(x) + S\circ T(h) + |h| R_3(h).$$

Vi måste, för att avsluta beviset, visa att

$$\lim_{h\to 0} R_3(h) = 0.$$

Eftersom $\lim_{h\to 0} R_1(h)=0$, $\lim_{k\to 0} R_2(k)=0$ och $S(0)=0$

så följer det att

$$(****)\quad \lim_{h\to 0} R_3(h) = \underbrace{S(R_1(h))}_{\to 0} + \left|T\left(\frac{h}{|h|}\right) + \underbrace{R_1(h)}_{\to 0}\right| \underbrace{R_2(k)}_{\to 0} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left|T\left(\frac{h}{|h|}\right)\right| R_2(k)$$

Kan vi visa att $T\left(\frac{h}{|h|}\right)$ är begränsad då $h\to 0$ så följer det från (****) att $\lim_{h\to 0} R_3(h)=0$.

Vi studerar mängden $\left\{\frac{h}{|h|} : h\neq 0\right\} = \{h : |h|=1\}$.

Det är klart att $\{h : |h|=1\}$ är en begränsad mängd för den ligger t.ex inuti bollen med radie 2 kring origo. Om vi kan visa att $\{h : |h|=1\}$ är sluten så ger Heine-Borels sats att $\{h : |h|=1\} \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt.

Tag därför en följd $\{h_j\}$ i $\{h : |h|=1\}$. Antag att $h_j \to h \notin \{h : |h|=1\}$. Men vi har att

$$1 = |h_j|,\ \text{så}\ 1 = \lim_{j\to\infty} |h_j| \underset{\substack{\uparrow \\ |\cdot|\ \text{kontinuerlig}}}{=} \left|\lim_{j\to\infty} h_j\right| = |h|$$

så $|h|=1$ och $h\in\{h : |h|=1\}$. Därför är $\{h : |h|=1\}$ sluten, och därmed kompakt.

Men T är ju linjär så den är även kontinuerlig.

Detta ger att $\left\{ T\left(\frac{h}{|h|}\right) : h \neq 0 \right\} = T(\underbrace{\{ h : |h| = 1 \}}_{\text{kompakt}})$

och eftersom kontinuerliga funktioner avbildar kompakter på kompakter så följer det att

$$T(\{ h : |h| = 1 \})$$

är kompakt i $\mathbb{R}^m$. Heine-Borel ger nu igen att $T(\{ h : |h| = 1 \})$ är sluten och begränsad. Vi ville visa att $T\left(\frac{h}{|h|}\right)$ var begränsad, så (****) ger att $\lim_{h \to 0} R_3(h) = 0$. Alltså är $g \circ f$ differentierbar och $(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x)$.

$\square$