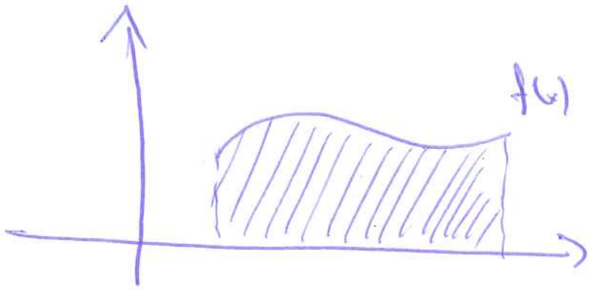
Föreläsning 6

Vi ska nu börja med integrationsteori. Vi börjar med följande utgångspunkt:

Antag att $I=[a,b] \subset \mathbb{R}$ är ett kompakt intervall, och antag att $f:I\to\mathbb{R}$ är en begränsad funktion, dvs $|f(x)|\leq M$ för något $M\geq 0$.

Vi vill beräkna arean under f på intervallet $[a,b]$.



Idén är att dela upp intervallet $[a,b]$ och beräkna arean för små rektanglar och sedan summera de olika areorna för rektanglarna. Uppdelningen kallas för en partition:

<u>Definition:</u> (Partition)

Om $I=[a,b]$ är ett kompakt intervall i $\mathbb{R}$, då är en <u>partition</u> av I en ändlig, ordnad mängd

$$P:=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$$

av punkter i I så att

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Punkterna i P används för att dela I i icke-överlappande delintervall

$$I_1 = [x_0, x_1], \; I_2 = [x_1, x_2], \ldots, I_n = [x_{n-1}, x_n]$$

Ex:

En partition av $[0,2]$ är t.ex given av

$$P = \{ \underset{\overset{\shortparallel}{x_k}}{\frac{2k}{n}} : k = 0, \ldots, n \}, \text{ så } [0,2] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}]$$

Definition: (Översumma)

Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion och antag att $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ är en partition P av $[a,b]$. Låt $M_j = \sup_{x \in I_j} f(x)$ för $j = 1, \ldots, n$. (som existerar ty f är begränsad). Vi definierar översumman av f med avseende på P genom

$$U(f;P) = \sum_{j=1}^{n} M_j \, |I_j|$$

där $|I_j|$ är längden av I_j, dvs $|I_j| = x_j - x_{j-1}$

Anmärkning:

Man definierar den så kallade undersumman av f med avseende P genom

$$L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|$$

där $m_j = \inf_{x \in I_j} f(x)$ för $j = 1, \ldots, n$.

Definition: (Förfining)

Låt P vara en partition av ett intervall $[a,b]$. Vi säger att P' är förfining av P om vi får P' genom att lägga till punkter till P, dvs $P \subset P'$.

Ex:

Låt $P = \{0, 1, 2\}$ vara en partition av P. En förfining till P är $P' = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$. Det finns förstås fler förfiningar till P.

Lemma:

Om $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är en begränsad funktion och P är en partition av $[a,b]$, då är

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

Bevis:

Eftersom $\inf_x f(x) \leq \sup_x f(x)$ så följer det att

$$L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in I_j} f(x)|I_j| \leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in I_j} f(x)|I_j| = U(f,P)$$

där $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ är partitionen P.

$\square$

Sats:

Låt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion, och låt P vara en partition av $[a,b]$. Då gäller att

a) Om P' är en förfining av P så är

$$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P)$$

b) Om R är en annan partition av $[a,b]$, då är

$$L(f,R) \leq U(f,P)$$

c) $-U(-f,P) = L(f,P)$

Bevis:

Beviset av (a) är en lätt övning. En ledning är att det är tillräckligt att betrakta förfiningen P' som man lägger till endast en punkt, sen följer resultatet via induktion.

(b). Betrakta partitionen $P \cup R$ av $[a,b]$. Då är $P \cup R$ en förfining av både P och R. Nu ger resultatet i (a) att

$$L(f,R) \leq L(f,P\cup R) \leq U(f,P\cup R) \leq U(f,P)$$

(c). Detta följer av att $\sup(-S) = -\inf(S)$ för alla mängder $S \subset \mathbb{R}$.

$\square$

Anmärkning:

Resultatet (b) ovan är faktiskt väldigt viktigt. Den säger att oavsett vilken partition vi tar av intervallet, så kan inte undersumman bli större än översumman.

Vi är nu snart i läge att definiera vad det betyder att en funktion är Riemannintegrerbar.
Idén är följande:

Definiera

$$U(f) = \inf_{P} U(f,P)$$

och

$$L(f) = \sup_{P} L(f,P)$$

Vi kaller $U(f)$ för <u>överintegralen</u> för f över $[a,b]$, och $L(f)$ för <u>underintegralen</u> för f över $[a,b]$.

<u>Observation:</u>

<u>Observation:</u> $L(f) \leq U(f)$ (följer från (b) i satsen på sidan 4).

$U(f)$ ($L(f)$) är den bästa övre (undre) approximationen till en eventuell area under f:s graf.

<u>Definition:</u> (Riemannintegrerbar)

Låt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Vi säger att f är (Riemann)integrerbar över $[a,b]$ om $U(f) = L(f)$, och vi betecknar talet $U(f)$, $L(f)$ genom

$$\int_a^b f$$

Mängden av Riemannintegrerbara funktioner skriver vi som $R([a,b])$.

Ex:

Låt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x)=c$, dvs en konstant funktion. Vi ska visa att f är integrerbar. Tag godtycklig partition P av $[a,b]$, antag att $[a,b]=\bigcup_{j=1}^{n} I_j$ är partitionen. Då är

$$\inf_{x\in I_j} f(x) = \inf_{x\in I_j} c = c \qquad \forall j=1,\dots,n$$

och

$$\sup_{x\in I_j} f(x) = \sup_{x\in I_j} c = c \qquad \forall j=1,\dots,n.$$

Detta ger att

$$L(f,P)=\sum_{j=1}^{n}\inf_{x\in I_j} f(x)\,|I_j| = \sum_{j=1}^{n} c\,|I_j| = U(f,P)$$

Men

$$\sum_{j=1}^{n} c\,|I_j| = c\sum_{j=1}^{n}|I_j| = c\,(|I_1|+\dots+|I_n|) = c\cdot|[a,b]|$$

så

$$L(f)=\sup_P L(f,P) = c\cdot|[a,b]|$$

och

$$U(f)=\inf_P U(f,P) = c\cdot|[a,b]|$$

Alltså är f integrerbar på $[a,b]$ och

$$\int_a^b f = c\cdot|[a,b]| = c\cdot(b-a)$$

Q: Finns det några icke-integrerbara funktioner?

Svar: Ja, se exemplet nedan

Ex:

Låt $I=[0,1]$ och låt $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{om } x\in\mathbb{Q}\cap I \\ 0 & \text{om } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cap I \end{cases}$$

Vi ska visa att f inte är integrerbar. Tag en godtycklig partition P av I, säg att $I=\bigcup_{j=1}^{n} I_j$. Då är

$$\inf_{x\in I_j} f(x)=0 \qquad \forall j=1,\dots,n$$

och

$$\sup_{x\in I_j} f(x)=1 \qquad \forall j=1,\dots,n.$$

Detta ger att

$$L(f,P)=\sum_{j=1}^{n}\left(\inf_{x\in I_j} f(x)\right)|I_j|=\sum_{j=1}^{n} 0\cdot|I_j|=0$$

och

$$U(f,P)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_{x\in I_j} f(x)\right)|I_j|=\sum_{j=1}^{n}|I_j|=|I|=1.$$

Därför är, ty P är godtycklig, $L(f)=0$ och $U(f)=1$, dvs $L(f)\neq U(f)$, så f är inte integrerbar på $[0,1]$.

Sats: (Riemanns integrabilitetsvillkor)

En begränsad funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar på $[a,b]$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists$ partition P av $[a,b]$: $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Bevis:

$\Rightarrow$: Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar. Tag godtyckligt $\varepsilon>0$. Då finns det en partition P av $[a,b]$ så att

(*) $$L(f,P)+\varepsilon/2 > L(f) \quad \text{(egenskap hos sup)}$$

och det finns en partition Q av $[a,b]$ så att

(**) $$U(f,Q)-\varepsilon/2 < U(f) \quad \text{(egenskap hos inf)}$$

$P\cup Q$ är en förfining för både P och Q, så satsen på sidan 4 ger att

$$U(f,P\cup Q)\le U(f,Q) \underset{(**)}{<} U(f)+\varepsilon/2 \underset{f \text{ integrerbar}}{=} L(f)+\varepsilon/2 <$$

$$\underset{(*)}{<} L(f,P)+\varepsilon/2+\varepsilon/2 \le L(f,P\cup Q)+\varepsilon$$

$P\cup Q$ är den partition vi sökte och för den har vi att

$$U(f,P\cup Q)-L(f,P\cup Q)<\varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Antag att för alla $\varepsilon > 0$ finns en partition P av $[a,b]$ så att

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Eftersom $U(f) \geq L(f)$ så får vi att

$$0 \leq U(f) - L(f) < U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtycklig så får vi att

$$U(f) - L(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$U(f) = L(f).$$

Detta betyder att f är integrerbar på $[a,b]$. $\square$.

En följd till denna sats är

Följd.

Om P_n är partitioner av $[a,b]$ så att

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Då är f integrerbar på $[a,b]$ och

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

Bevis:

För $\varepsilon > 0$ så finns det ett $N \in \mathbb{N}$ så att om $n \geq N$ så gäller att

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) < \varepsilon$$ (Det är detta konvergensen betyder)

Enligt Riemanns integrabilitetsvillkor så ser vi att f måste vara integrerbar över $[a, b]$.
Vidare så gäller att, för $n \geq N$,

$$0 \leq U(f, P_n) - U(f) < \underbrace{L(f, P_n) - L(f)}_{\leq 0} + \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Detta ger att $U(f, P_n) \to U(f)$ då $n \to \infty$.
Alltså:

$$\int_a^b f = U(f) = \lim_{n \to \infty} U(f, P_n).$$

$\square$

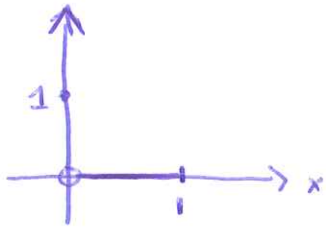
Q: Måste integrerbara funktioner vara kontinuerliga?

Svar: Nej, och ett exempel ges nedan.

Ex:

Låt $I = [0,1]$ och låt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = 0 \\ 0 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$



Vi ska se att $\int_0^1 f = 0$, och därmed så är f integrerbar, men f är ju klart diskontinuerlig i origo.

Låt partitionen P_n av I vara given av

$$I_1 = [0, \tfrac{1}{n}], \quad I_2 = [\tfrac{1}{n}, 1].$$

Då är

$$L(f,P_n) = \underbrace{\inf_{x \in I_1} f(x)}_{=0} \cdot |I_1| + \underbrace{\inf_{x \in I_2} f(x)}_{=0} |I_2| = 0 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \tfrac{1}{n}) = 0.$$

och

$$U(f,P_n) = \underbrace{\sup_{x \in I_1} f(x)}_{=1} \cdot |I_1| + \underbrace{\sup_{x \in I_2} f(x)}_{=0} \cdot |I_2| = 1 \cdot \tfrac{1}{n} + 0 \cdot (1 - \tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n}$$

Detta ger att $U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n} \to 0$ då $n \to \infty$.

Nu ger följden på sidan 11 att f är integrerbar på $[0,1]$ och $\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ex:

Låt $I=[0,1]$ och låt $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ vara integrerbar på I. Antas vidare att $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ ges av

$$g(x)=\begin{cases} a & , x=0 \\ f(x) & , x>0 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}.$$

Då är g integrerbar över I och $\int_0^1 g=\int_0^1 f$.
Här använder man metoden liknande i som i förra exemplet.

Ex:

Låt $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ vara en funktion definierad genom

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , x=a\in(0,1) \text{ godtycklig} \\ 0 & ; x\neq a. \end{cases}$$

Man kan då visa att f är integrerbar över $[0,1]$ och att $\int_0^1 f=0$.

Anmärkning:

Ett ändligt antal diskontinuitetspunkter "stör" inte integralen. (Se även sats 6.10 i boken).

Ex:

I boken, sidan 41, så tar man upp den så kallade Cantormängden C. Detta är en mängd som är överuppräknelig men saknar inre punkter, så C är alltså lika "stor" som $\mathbb{R}$ eller $[0,1]$. Definiera nu $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in C \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Då är f Riemannintegrerbar och $\int_0^1 f = 0$.

Vi har tidigare sett att vi inte behöver ha kontinuitet för att ha integrerbarhet, så följande resultat är inte så konstigt:

Sats:

Antag att $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Då är f integrerbar på $[a,b]$.

Bevis:

Varje kontinuerlig funktion definierad på en kompakt är likformigt kontinuerlig. Därför så kan vi givet $\varepsilon > 0$, hitta $\delta > 0$ så att

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

då $x, y \in [a,b]$ och $|x-y| < \delta$. Välj $N > \frac{b-a}{\delta}$ och betrakta partitionen $P = \{x_0, \ldots, x_N\}$ där

$$x_j = a + j\,\frac{b-a}{N}$$

För $x, y \in [x_j, x_{j+1}]$ så är $|x-y| < \delta$ och

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Detta gällde ju för alla $x, y \in [a, b]$! Det följer därför att

$$\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} (f(x)) - \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall j = 0, \ldots, N-1.$$

Detta ger att

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{j=0}^{N-1} \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)\,(x_{j+1} - x_j) - \sum_{j=0}^{N-1} \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)(x_{j+1} - x_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\Big(\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) - \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x)\Big)}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} (x_{j+1} - x_j) <$$

$$< \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{j+1} - x_j) \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}} \frac{\cancel{b-a}}{N} = \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=0}^{N-1} 1 = \frac{\varepsilon \cdot \cancel{N}}{\cancel{N}} = \varepsilon.$$

$$x_{j+1} - x_j = a + (j+1)\frac{b-a}{N} - a - j\,\frac{b-a}{N} =$$

$$= \frac{b-a}{N}$$

Så $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$, så f är Riemannintegrerbar

enligt Riemanns integrabilitetsvillkor.

$\square$

Integrerbarhet uppfyller alla tänkbara aritmetiska operationer.

Sats:

Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion som är int.bar. Då är avbildningen

$$f \longmapsto \int_a^b f$$

en linjär avbildning.

Anmärkning:

Ur ovanstående sats så följer det att $af+bg$ är integrerbar om f och g är integrerbar, för alla konstanter a och b.

Anmärkning:

Linjäriteten hos $\int_a^b$ betyder även att

$$\int_a^b (af+dg) = a\int_a^b f + d\int_a^b g.$$

Integralen bevarar även positivitet

<u>Sats:</u>

Om $f \geq 0$ är en integrerbar funktion, då är $\int f \geq 0$.

Kom ihåg att en funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kallas monoton om den antingen är växande eller avtagande.

<u>Sats:</u>

Monotona funktioner är integrerbara.

<u>Bevis:</u>

Antag att $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är monoton, och vi antar att f är växande. Välj en partition $P = \{x_0, \dots, x_N\}$ genom

$$x_j = a + j\frac{b-a}{N}$$

Då är $x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{N}$ $\forall j = 0, \dots, N-1$. Eftersom f är växande och monoton så är

$$M_j = \sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) = f(x_{j+1})$$

och

$$m_j = \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) = f(x_j)$$

för alla $j = 0, \dots, N-1$. Detta ger att

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=0}^{N-1} M_j (x_{j+1} - x_j) - \sum_{j=0}^{N-1} m_j (x_{j+1} - x_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} f(x_{j+1}) \frac{b-a}{N} - \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f(x_{j+1}) - f(x_j) \right)$$

Observera att

$$f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_N) - f(x_{N-1}) =$$

$$= f(x_N) - f(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ x_0 = a \\ x_N = b \ \text{i} \ P}}{=} f(b) - f(a).$$

Alltså får vi att

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{b-a}{N} \left(f(b) - f(a) \right)$$

För givet $\varepsilon > 0$ välj N så att

$$N > \frac{b-a}{\varepsilon} \left(f(b) - f(a) \right).$$

Då blir

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

så f är integrerbar.

$\square$

Sats:

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar och antag att $g:\mathrm{Im}(f)\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig. Då är $g\circ f$ integrerbar.

Med hjälp av denna sats så kan man avgöra integrabilitet hos många funktioner.

Följd 1:

Om $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar, då är f^n integrerbar för varje val av $n\in\mathbb{N}$.

Bevis:

Låt $g(x)=x^n$. Då är g kontinuerlig och enligt satsen ovan så är $g\circ f=f^n$ integrerbar.

Följd 2:

Om $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ och $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbara, då är fg också integrerbar.

Bevis:

Vi har att $f+g$ är integrerbar och enligt förra följden så är $(f+g)^2$ också integrerbar. Detta ger att

$$(f+g)^2=f^2+2fg+g^2.$$

Eftersom f^2 och g^2 är integrerbar och en konstant gånger en integrerbar funktion är integrerbar så följer det att

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

är integrerbar.

$\square$

Följd 3:

Om $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är integrerbar, då är $|f|$ också integrerbar.

Bevis:

$g(x) = |x|$ är kontinuerlig, så $g \circ f = |f|$ är integrerbar enligt satsen på sidan 19.

Ex:

Funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1 & \text{om } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$ är inte

integrerbar, men $|f(x)| = 1$ för alla $x \in [0,1]$. Därför är $|f|$ integrerbar. Detta visar att Följd 3:s omvändning inte gäller.

Ex:

Låt $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & x = 0 \\ 1/n & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \; x = m/n, \; \gcd(m,n) = 1 \end{cases}$$

(Inte monoton, diskontinuerlig i varje rationell punkt)

Låt sgn vara signumfunktionen. Då är $\operatorname{sgn}(f)$ inte integrerbar. Detta visar att vi inte kan släppa på villkoret kontinuitet i satsen på sidan 19.

Sats:

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ och $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbara.
Om $f\le g$ på $[a,b]$, då är $\int_a f \le \int_a^b g$.

Sats:

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar på $[a,b]$. Då är f integrerbar på $[a,c]$ och $[c,b]$ för varje val av c så att $a<c<b$. Vidare så gäller att

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b$$

Sats:

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar. Då gäller att

$$\left|\int_a^b f\right| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\cdot|b-a|$$

Att inte integrerbara funktioner är obegränsade säger nästa sats. Detta är bra, för då vet man att

$$\sup|f(x)| < \infty.$$

och att föregående sats faktiskt har ett innehåll.

Sats:

Antag att $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är integrerbar på $[a,b]$. Då är f begränsad på $[a,b]$.

Bevisidé:

Antag att f är obegränsad och att $\int_a^b f = L$.

Då finns det en partition P så att

(*) $$|U(f,P)| < |L| + 1.$$

Eftersom $|f|$ inte är begränsad så finns det åtminstone en del av partitionen där $|f|$ är obegränsad.

Detta intervall, där $|f|$ är obegränsad, gör så att

$$|U(f,P)| > |L| + 1$$

vilket motsäger (*). Alltså måste f vara begränsad.

$\square$

För integraler så har man även en triangelolikhet.

Sats. (Triangelolikhet)

Antag att $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är integrerbar. Då gäller att

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Anmärkning:

Högerledet $\int_a^b |f|$ är veldigt, eftersom $|f|$ är integrerbar.

Vi ska nu äntligen se hur man beräknar integraler som vi är vana vid.

Sats: (Integralkalkylens huvudsats)

Låt $E \subset [a,b]$ vara en ändlig mängd och låt $f, F: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara sådan att

a) F är kontinuerlig på $[a,b]$

b) $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in [a,b] \setminus E$ (F primitiv funktion till f)

c) f är integrerbar över $[a,b]$.

Då gäller att

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bevis:

Vi ska visa satsen i det fall då $E = \{a,b\}$.

Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom f är integrerbar så finns en partition så att

$$\left| U(f,P) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

Antag att partitionen består av intervall $I_j = [x_{j-1}, x_j]$

Använd medelvärdessatsen på F och I_j, varvid vi kan hitta en punkt $c_j \in (x_{j-1}, x_j)$ så att

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(c_j)\cdot(x_j - x_{j-1}). \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow \text{ (enligt (b))}$$

$$(*) \qquad F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(c_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Observera att

$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \{x_0, \dots, x_n\} \text{ partition.}}}{=} F(b) - F(a).$$

Vi får alltså att

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{n} (F(x_j) - F(x_{j-1})) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1})}_{U(f,P)}$$

Detta ger att

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

enligt början av beviset.

$\square$

Ex:

Låt $f:[-A,A]\to\mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x)=|x|$. Då är $f'(x)=\mathrm{sgn}(x)$ för $x\in[-A,A]\setminus\{0\}$, eftersom i origo så är f inte deriverbar. Eftersom sgn är integrerbar så kan vi använda integralkalkylens huvudsats med $E=\{0\}$. Vi får då att

$$\int_{-A}^{A}\mathrm{sgn}(x)\,dx=f(A)-f(-A)=|A|-|-A|=A-A=0.$$

Ex:

Låt $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x)=2\sqrt{x}$. Då är f kontinuerlig och $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, för $x\in(0,b]$. Eftersom f' är obegränsad på $[0,b]$ så är f' inte integrerbar på $[0,b]$. Detta betyder att vi inte kan utnyttja integralkalkylens huvudsats. För att beräkna

$$\int_0^b\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

så måste man införa generaliserade Riemannintegraler. Detta kommer vi att göra sedan.

Sats: (Integralkalkylens huvudsats, version 2)

Antag att $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a,b]$.

Låt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Då är F deriverbar på $[a,b]$

och $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in [a,b]$.

Observation:

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$, då är $\int_a^x f(t)\,dt$ en primitiv funktion för f.

Däremot så behöver inte $\int_a^x f(t)\,dt$ vara en primitiv funktion:

Ex:

Låt $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$.
Då är f integrerbar över $[-1,1]$. Låt $F(x) = \int_{-1}^x \mathrm{sgn}(t)\,dt =$

$= |x| - |-1| = |x| - 1$. Men $F'(0)$ existerar inte, så F är inte en primitiv funktion för f på $[-1,1]$.

Sats: (Integralkalkylens medelvärdessats)

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig, och antag att $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ är en icke-negativ funktion på $[a,b]$, dvs $p\geq 0$. Då finns ett $c\in[a,b]$ så att

$$\int_a^b f\cdot p = f(c)\int_a^b p.$$

Observation:

Då $p=1$ så får vi den "vanliga" medelvärdessatsen, dvs

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c).$$

Sats: (Integralkalkylens starka medelvärdessats)

Antag att $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a,b]$, och antag att $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ uppfyller att $p\geq 0$ och att p är integrerbar över $[a,b]$. Då finns det ett $c\in[a,b]$ så att

$$\int_a^b f\cdot p = f(c)\int_a^b p.$$

Bevis:

Eftersom f är kontinuerlig så är f integrerbar. Eftersom p också är integrerbar så följer det att $f \cdot p$ är integrerbar. Låt

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{och} \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Då är det klart att

$$mp \leq f \cdot p \leq Mp \quad \text{på } [a,b].$$

Detta ger att

$$(*) \quad m\int_a^b p = \int_a^b mp \underset{mp \leq fp}{\overset{\uparrow}{\leq}} \int_a^b fp \underset{fp \leq Mp}{\overset{\uparrow}{\leq}} \int_a^b Mp = M\int_a^b p.$$

Om $\int_a^b p = 0$ då är $\int_a^b fp = 0$ enligt ovan och slutsatsen i satsen är sann.

Antag därför att $\int_a^b p \neq 0$. Då ger $(*)$ att

$$m \leq \frac{\int_a^b fp}{\int_a^b p} \leq M$$

Nu ger satsen om mellanliggande värden att det finns ett $c \in [a,b]$ så att

$$f(c) = \frac{\int_a^b fp}{\int_a^b p}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_a^b fp = f(c) \int_a^b p.$$

$\square$.

Vi ska avsluta denna föreläsning med en diskussion om generaliserade Riemannintegraler.

Definition:

Låt $I = (a, b]$ och låt $f : I \to \mathbb{R}$. Om f är integrerbar på $[r, b]$ för alla r med $a < r < b$, då definierar vi

$$\int_a^b f := \lim_{r \downarrow a} \int_r^b f.$$

Ex:

Låt $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = \ln x$. Då är f integrerbar på $[r, 1]$ för alla $r > 0$. Detta ger att

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{r \downarrow 0} \int_r^1 \ln x \, dx = \lim_{r \downarrow 0} \left[x \ln x - x \right]_r^1 =$$

$$= 1 \cdot \ln(1) - 1 - \lim_{r \downarrow 0} (r \ln r - r) = 0 - 1 - 0 - 0 = -1$$

Anmärkning:

Om $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ så definierar man

$$\int_a^b f := \lim_{r \uparrow b} \int_a^r f$$

där f är integrerbar på $[a,r]$.

Definition:

Låt $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$. Om f är integrerbar över $[a,R]$ för alla $R>a$. Då definierar vi

$$\int_a^\infty f := \lim_{R \uparrow \infty} \int_a^R f$$

Ex:

Låt $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x)=e^{-x}$. Då är f integrerbar över $[0,R]$ för alla $R>0$. Detta ger att

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R \uparrow \infty} \int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R \uparrow \infty} \left[-e^{-x}\right]_0^R = +e^0 - \lim_{R \uparrow \infty} e^{-R} =$$

$$= +1 + 0 = \underline{\underline{+1}}$$

Anmärkning:

Man definierar $\int_{-\infty}^{b} f$ liknande, dvs

$$\int_{-\infty}^{b} f = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{b} f$$

om $\forall R < b$: f är integrerbar på $[R, b]$.

Hur ska man definiera

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \quad ?$$

Jo, vi definierar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f := \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f$$

om båda integralerna existerar.