Föreläsning 7

Vi ska studera en följd av funktioner, säg $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, och vi vill avgöra konvergens för denna följd av funktioner, dvs vad är $\lim_{n\to\infty} f_n$?

Fixera en punkt $x=a$. Om $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så bildar $\{f_j(a)\}_{n=1}^{\infty}$ en (punkt)-följd i $\mathbb{R}$, och denna kan vi avgöra konvergens för.

Ex:

Låt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f_n(x) = \sin^n x$

Betrakta punkten $x = \frac{\pi}{4}$. Då är

$f_1(\pi/4) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/2}$

$f_2(\pi/4) = (\sin \frac{\pi}{4})^2 = 2^{-1}$

$f_3(\pi/4) = 2^{-3/2}$

$f_4(\pi/4) = 2^{-2}$

Sätt $x_n = f_n(\pi/4)$ varvid $x_n = 2^{-n/2}$. Då blir $x_n \to 0$.

Förra exemplet ger en idé för vad konvergens kan betyda en funktionsföljd. Låt oss ge en formell definition

<u>Definition</u>: (Punktvis konvergens)

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum och att $f_n: M \to N$ är funktioner. Vi säger att funktionsföljden $\{f_n\}$ <u>konvergerar punktvis</u> på M om för varje $p \in M$ så konvergerar punktföljden $\{f_n(p)\}$ i N.

<u>Anmärkning</u>:

Om $\{f_n\}$ konvergerar punktvis på M så låter vi för varje $p \in M$: $f(p) = \lim_{n \to \infty} f_n(p)$. Vi säger att $f_n \to f$ punktvis på M. Detta betyder att

$$\forall p \in M \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \underset{(K(\varepsilon,p))}{K \in \mathbb{N}} : \forall n \geq K \implies d_N(f_n(p), f(p)) < \varepsilon.$$

Ex:

Låt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f_n(x) = \sin^n x$

Vi ska visa att f_n konvergerar punktvis på $[0, \pi]$ men inte konvergerar på $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

Bevis:

Vi börjar med att visa konvergensen. Tag godtyckligt $x \in [0, \pi]$ och studera följden $\{\sin^n(x)\}$ i $\mathbb{R}$.

Observera att om $x \neq \frac{\pi}{2}$ så är $0 \leq \sin x < 1$, och då får vi att $\sin^n x \to 0$ (Kom ihåg att om $0 \leq x < 1$ så $x^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$)

Om $x = \frac{\pi}{2}$ så är $\sin x = 1$ så $\sin^n x \to 1$.

Alltså är f_n punktvis konvergent på $[0, \pi]$.

För att se att f_n inte konvergerar på $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ så är det tillräckligt att hitta en punkt $x \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ där $f_n(x)$ inte konvergerar. Tag $x = \frac{3\pi}{2} \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

Då är $\sin(x) = -1$, så $\sin^n x = (-1)^n$. Men $(-1)^n$ är divergent, så f_n också divergent.

Om vi definierar $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \pi/2 \\ 1, & x = \pi/2 \end{cases}$ på $[0, \pi]$, så ser vi att $f_n \to f$ punktvis på $[0, \pi]$.

Anmärkning/observation:

Punktvis konvergens bevarar inte kontinuitet.
Förra exemplet visade detta, ty $f_n(x) = \sin^n x$
är kontinuerliga för alla $n \geq 1$ och x. Men
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \pi/2 \\ 1, & x = \pi/2 \end{cases}$$
har klart en diskontinuitetspunkt i $x = \pi/2$. Trots detta så $f_n \to f$ punktvis på $[0, \pi]$.

Punktvis konvergens bevarar inte heller deriverbarhet:

Ex:

Låt $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $g_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.
Det är klart att

$$\sqrt{x^2 + \underbrace{1/n}_{\to 0}} \to \sqrt{x^2} = |x| \quad n \to \infty. \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Så $g_n \to |x|$ punktvis på $x \in \mathbb{R}$. Observera att
$g_n'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}}$, så alla g_n är deriverbara för alla $x \in \mathbb{R}$,
men $|x|$ är inte deriverbar i origo.
Vi drar slutsatsen att punktvis konvergens inte bevarar deriverbarhet.

Q: Finns det någon annan konvergens för funktionsföljder som bevarar "goda" egenskaper som kontinuitet och deriverbarhet.

Svar: Ja, likformig konvergens.

Definition: (Likformig konvergens).

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum och att $f_n, f: M \to N$ är funktioner. Vi säger att $f_n \to f$ likformigt på M om

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{(K(\varepsilon))}{K \in \mathbb{N}} \ \forall p \in M \ \forall n \geq K \Rightarrow d_N(f_n(p), f(p)) < \varepsilon.$$

Observation:

Likformig konvergens är starkare än punktvis konvergens, dvs om $f_n \to f$ likformigt på $M \Rightarrow f_n \to f$ punktvis på M.

Nästa resultat är ett viktigt verktyg när man jobbar med likformig konvergens.

Sats:

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum och att $f, f_n : M \to N$ är begränsade funktioner. Då gäller att

$$f_n \to f \text{ likformigt på } M$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sup_{p \in M} d_N(f_n(p), f(p)) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Beviset är en rättfram uträkning som använder definitionen av likformig konvergens samt "vanlig" konvergens.

Ex:

Låt $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vara definierade genom

$$f_n(x) = x^n \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \ x = 1 \end{cases}$$

Det är klart att $f_n \to f$ punktvis på $[0,1]$.

Är konvergensen likformig?

Vi ska visa att konvergensen inte är likformig.

Vi har att

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1)} |x^n - f(x)| = 1 \not\to 0$$

Alltså är konvergensen inte likformig.

Ex:

Betrakta $f_n, f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definierade genom

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \quad ; \quad f(x) = 0$$

Påstående 1: $f_n \to 0$ punktvis

Påstående 2: $f_n \not\to 0$ likformigt.

Bevis av 1:

Tag godtyckligt $x \in [0,\infty)$ Då är

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} \leq \frac{x}{n} \to 0 \quad \text{då } n \to \infty \quad (x \text{ är ju fixerat})$$

Bevis av 2:

Betrakta

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ f_n(x)\geq 0}}{=} \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x)$$

Vi måste se hur f_n upp för sig som funktion.

1) $f_n(0) = \frac{0}{0+n} = 0 \quad \forall n.$

2) $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+n/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{n/x}_{\to 0}} = 1.$

Detta betyder att $\sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x) \geq 1 \not\to 0$, så $f_n \not\to 0$ likformigt.

Påstående 3:

$f_n \to 0$ på $[0, a]$ för alla $a > 0$.

Bevis av 3:

Observera att $f_n'(x) = \dfrac{x+n-x}{(x+n)^2} = \dfrac{n}{(x+n)^2} > 0$

så f_n växer på $[0, a]$, och därför är

$$\sup_{x \in [0,a]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0,a]} f_n(x) = \frac{a}{a+n} \to 0$$

Alltså $f_n \to 0$ likformigt på $[0, a]$.

Anmärkning:

Man måste vara försiktig med området man vill ha konvergens, enligt föregående exempel så spelar konvergensområdet stor roll.

Sats:

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum där vi antar att man kan definiera addition i N. Låt $f_n, g_n, f, g : M \to N$ vara funktioner, och antag att $f_n \to f$ och $g_n \to g$ båda likformigt på M. Då $f_n + g_n \to f + g$ likformigt på M.

Bevis: då $\mathbb{N} = \mathbb{R}$

Antag att $|f_n(p) - f(p)| < \varepsilon/2$ $\forall p \in M$ och att $|g_n(p) - g(p)| < \varepsilon/2$ $\forall p \in M$. Då gäller att

$$\sup |(f_n + g_n)(p) - (f+g)(p)| \le \sup |f_n(p) - f(p)| + \sup |g_n(p) + g(p)|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

D.

Däremot om $f_n \to f$ likformigt på M och $g_n \to g$ likformigt på M, då behöver <u>inte</u> $f_n g_n \to fg$ likformigt på M. Däremot så gäller att $f_n g_n \to fg$ punktvis på M.

Ex:

Låt $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ och $g_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ vara definierade genom

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$$

$$g_n(x) = \frac{1}{n(x+1)}$$

Det är klart att $f_n(x) \to \frac{1}{x}$ punktvis på $(0,\infty)$ och $g_n(x) \to 0$ punktvis på $(0,\infty)$.

Är konvergensen likformig?

f_n:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \left| f_n(x) - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Alltså $f_n(x) \to \frac{1}{x}$ likformigt på $(0,\infty)$

g_n:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} |g_n(x) - 0| = \sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{1}{n(x+1)} \right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{n(x+1)} = \frac{1}{n} \to 0$$

Alltså $g_n(x) \to 0$ likformigt på $(0,\infty)$

$f_n g_n$:

Vi har att

$$f_n(x) g_n(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n(x+1)} \right) = \frac{1}{n(x+1)x} + \frac{1}{n^2(x+1)} = \frac{n+x}{n^2 x(x+1)}$$

Vi vet att

$$f_n(x)\,g_n(x) \to \frac{1}{x}\cdot 0 = 0 \quad \text{punktvis på } (0,\infty).$$

Är konvergensen likformig?

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \left| \frac{n+x}{n^3x(x+1)} - 0 \right| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{n+x}{n^3x(x+1)} = \infty \not\to 0 \quad n\to\infty.$$

Alltså $f_n g_n \not\to 0$ likformigt på $(0,\infty)$.

__Sats:__

Antag att (M, d_M) och (N, d_N) är metriska rum, och antag att $f_n, f : M \to N$ är funktioner så att $f_n \to f$ likformigt på M. Då är f kontinuerlig.

__Ex:__

Låt $f_n(x) = \sin^n x$. Vi såg på sidan 3 att f_n konvergerar punktvis mot $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \pi/2 \\ 1, & x = \pi/2 \end{cases}$ på $[0,\pi]$.
Eftersom f_n är kontinuerlig på $[0,\pi]$ och f ej är kontinuerlig så ger föregående sats att konvergensen <u>inte</u> är likformig.

Antag att $f_n \to f$ punktvis på M och antag att både f_n och f är kontinuerlig. Detta gäller t.ex om f_n är kontinuerlig och $f_n \to f$ likformigt på M. Antag att $x_m \to x$ i M.
Då gäller att

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x_m) = \lim_{m\to\infty} f(x_m) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ kontinuerlig}}}{=} f(\lim_{m\to\infty} x_m) =$$

$$= f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lim_{m\to\infty} x_m) \underset{\substack{\uparrow \\ f_n \text{ kontinuerlig}}}{=} \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f_n(x_m).$$

Vi kunde alltså byta plats på gränsvärden!

<u>Q</u>: Under vilka förhållanden får vi skifta plats på två gränsvärden?

<u>Ex</u>:

Antag att $\{x_m\} \subset [0,\pi]$ och att $x_m \to \pi/2$ men $x_m \neq \frac{\pi}{2}$.
Då är

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sin^n(x_m) = \lim_{n\to\infty} f(x_m) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0$$

och

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \sin^n(x_m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kontinuitet}}}{=} \lim_{n\to\infty} \sin^n(\pi/2) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Alltså i detta fall kan vi <u>inte</u> byta plats på gränsvärden.

Nästa sats säger när vi kan byta plats på gränsvärden:

<u>Sats:</u>

Antag att $f_n \to f$ likformigt på en mängd E i ett metriskt rum. Låt x vara en hopningspunkt för E och antag att

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = y_n \quad , n \geq 1.$$

Då konvergerar $\{y_n\}$ och

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t).$$

Nästa fråga vi ska besvara är när vi kan byta plats på gränsvärden vid integration, dvs när gäller:

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n = \int \lim_{n \to \infty} f_n \quad ?$$

Ex:

Definiera $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ genom

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{om } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad (n \geq 2).$$

Eftersom varje f_n är styckvis konstant så är f_n integrerbar på $[0,1]$. Vidare så gäller att

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{1/n}^{2/n} n\,dx = [nx]_{1/n}^{2/n} = n \cdot \frac{2}{n} - n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Eftersom $\frac{1}{n} \to 0$ och $\frac{2}{n} \to 0$ då $n \to \infty$ så gäller att $f_n(x) \to 0$ punktvis på $[0,1]$.
Men $f_n \not\to 0$ likformigt. Vidare så gäller att

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0 = 0$$

och

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Därför gäller att $\lim_{n\to\infty} \int f_n \neq \int \lim f_n$.

Q: Måste vi ha likformig konvergens för att få byta plats på lim och ∫?

Ex:

Låt $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f_n(x) = \frac{1}{n(x+1)}$. Vi såg i exemplet på sidan 10 att $f_n \to 0$ likformigt på $[0,\infty)$. Därför gäller att

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^\infty 0 = 0$$

Vidare så är

$$\int_0^\infty f_n(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{1}{x+1} = \infty$$

Alltså $\lim_{n\to\infty} \int f_n \neq \int \lim_{n\to\infty} f_n$.

Denna gång hade vi likformig konvergens, men vi kunde inte byta plats på lim och ∫ ändå!

Denna gång hade vi konvergens på en öppen mängd. Vad händer om vi har konvergens på en sluten mängd istället?

Ex:

Låt $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f_n(x) = \frac{n^2}{(n^2+x)^2}$$

Det är klart att $f_n \to 0$ punktvis på $[0,\infty)$.
Är konvergensen likformig?
Vi har att

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \left| \frac{n^2}{(n^2+x)^2} - 0 \right| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{n^2}{(n^2+x)^2} = \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \to 0$$

Alltså $f_n \to 0$ likformigt på den slutna mängden $[0,\infty)$.

Detta betyder att

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^\infty 0 = 0.$$

Å andra sidan så är

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{n^2}{(n^2+x)^2}\,dx = n^2 \lim_{R\uparrow\infty} \int_0^R \frac{dx}{(n^2+x)^2} =$$

$$= n^2 \lim_{R\uparrow\infty} \int_{n^2}^{R+n^2} \frac{dx}{x^2} = n^2 \lim_{R\uparrow\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{n^2}^{R+n^2} = n^2 \lim_{R\uparrow\infty} \Big(\frac{1}{n^2} - \underbrace{\frac{1}{R+n^2}}_{\to 0} \Big) =$$

$$= \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Därför är

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx \neq 0 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Vi drar slutsatsen att likformig konvergens på en sluten mängd är inte heller tillräckligt för att byta plats på lim och $\int$.

Så när kan vi byta plats?

Sats:

Om $f_n \to f$ likformigt på $[a,b]$ och antag att varje f_n är integrerbar på $[a,b]$. Då är f integrerbar på $[a,b]$ och

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \int_a^b f.$$

Anmärkning:

Så likformig konvergens på en sluten och begränsad (kompakt) mängd är alltså tillräckligt för att få byta plats på lim och $\int$.

Kom ihåg att funktionerna $g_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ konvergerade punktvis mot $|x|$ och att detta var ett exempel på en följd av deriverbara funktioner som inte konvergerade mot en deriverbar funktion ($|x|$ är inte deriverbar i origo). Har vi likformig konvergens så funkar det bättre:

Sats:

Antag att $I \subseteq \mathbb{R}$ är ett begränsat intervall och antag att $f_n : I \to \mathbb{R}$ är deriverbara funktioner. Antag att $\{f(x_0)\}$ konvergerar för något $x_0 \in I$ och att $f_n' \to g$ likformigt på I. Då finns det en funktion $f : I \to \mathbb{R}$ så att $f' = g$ på I och så att $f_n \to f$ likformigt på I.

Ex:

Låt $g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ vara definierade genom

$$g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n} = \frac{1}{ne^{nx}}$$

Då $g_n \to 0$ punktvis på $[0, \infty)$.

Är konvergensen likformig?

Vi har att

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |g_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{1}{ne^{nx}}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{då } n\to\infty.$$

Alltså $g_n \to 0$ likformigt på $[0,\infty)$.

Vidare så är $g_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{n} = -\frac{1}{e^{nx}}$

Vi har att $g_n' \to 0$ punktvis på $[0,\infty)$

Är konvergensen likformig?

Vi har att

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |g_n'(x) - 0| = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{1}{e^{nx}} = 1 \not\to 0$$

Alltså är konvergensen <u>inte</u> likformig.

Detta exempel visar att likformig konvergens och deriverbarhet inte är så lätt att förstå och att man inte ska ta någonting för givet.

En speciell metrik på begränsade, kontinuerliga funktioner

Låt $\mathcal{C}(M,N)$ vara mängden av kontinuerliga och kontinuerliga funktioner mellan metriska rum (M,d_M) och (N,d_N). Definiera $d: \mathcal{C}(M,N)\times\mathcal{C}(M,N)\to[0,\infty)$ genom

$$d_\infty(f,g) = \sup_{p\in M} d_N(f(p),g(p))$$

Vi ska visa att d_∞ är en metrik på $\mathcal{C}(M,N)$.

Positivt definit:

$$d_\infty(f,g)=0 \Leftrightarrow \sup_{p\in M} d_N(f(p),g(p)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall p\in M: f(p)=g(p) \Leftrightarrow f=g.$$

Symmetrisk:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{p\in M} d_N(f(p),g(p)) \underset{\substack{\uparrow \\ d_N \text{ symmetrisk}}}{=} \sup_{p\in M} d_N(g(p),f(p)) =$$

$$= d_\infty(g,f)$$

Triangelolikheten:

$$d_\infty(f,h) = \sup_{p\in M} d_N(f(p),h(p)) \underset{\substack{\uparrow \\ d_N\text{:s triangelolikhet}}}{\leq} \sup_{p\in M}\big(d_N(f(p),g(p)) + d_N(g(p),h(p))\big)$$

$$\leq \sup_{p\in M} d_N(f(p),g(p)) + \sup_{p\in M} d_N(g(p),h(p)) = d_\infty(f,g) + d(g,h).$$

Alltså är d_∞ en metrik!

Vad betyder konvergens i det metriska rummet $(\mathcal{C}(M,N), d_\infty)$?

$$f_n \to f \text{ i } \mathcal{C}(M,N)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N}\ \forall n \geq K \Rightarrow d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N}\ \forall n \geq K \Rightarrow \Big|\sup_{p\in M} d_N(f_n(p), f(p)) - 0\Big| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sup_{p\in M} d_N(f_n(p), f(p)) \to 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$f_n \to f$ likformigt på M.

Funktionsserier

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ och betrakta funktioner $f_n : I \to \mathbb{R}$.

Vi ska betrakta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

och avgöra konvergens hos denna så kallade funktionsserie.

Definition: (Partialsummer, konvergens)

Antag att $I \subseteq \mathbb{R}$ och att $f_n : I \to \mathbb{R}$ är funktioner.
Vi definerar partialsummorna för $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ genom

$$\begin{aligned}
s_1(x) &:= f_1(x) \\
s_2(x) &:= f_1(x) + f_2(x) \\
s_3(x) &:= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \qquad x \in I. \\
&\vdots \\
s_n(x) &:= f_1(x) + \dots + f_n(x)
\end{aligned}$$

Om $\{s_n\}$ konvergerar punktvis mot en funktion f på I, så säger vi att funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerar punktvis mot f på I.

Eftersom partialsummorna är en följd av funktioner så kan vi även prata om likformig konvergens:.

<u>Definition:</u> (Likformig konvergens)
Låt $f_n : I \to \mathbb{R}$, där $I \subseteq \mathbb{R}$, vara funktioner. Vi säger att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ <u>konvergerar likformigt</u> mot f om partialsummorna av funktioner konvergerar likformigt mot f.

Eftersom det är en serie, så kan vi även prata om absolutkonvergens.

<u>Definition:</u> (Absolutkonvergens)
Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ och $f_n : I \to \mathbb{R}$ vara funktioner. Vi säger att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ är <u>absolutkonvergent</u> om $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ konvergerar.

Kom ihåg följande:

$$\sum a_n \text{ konvergent} \Rightarrow a_n \to 0.$$

Detta betyder att

$$\sum f_n(x) \text{ konvergent} \Rightarrow f_n(x) \to 0 \text{ punktvis.}$$

För att ha en möjlighet till konvergens så måste $f_n(x) \to 0$ punktvis, men kom ihåg att det inte är ekvivalens. ($\frac{1}{n} \to 0$ men $\sum \frac{1}{n}$ divergent)

Ex:

Låt $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ vara definierade genom

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n + 1}$$

Vi ska undersöka vilken typ av konvergens vi har, och när vi har konvergens.

Antag först att $0 < |x| < 1$. Eftersom $x^n \to 0$ så $f_n \to 1$ punktvis, varvid $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergent.

Antag nu att $x=1$. Då är $f_n(1)=\frac{1}{2}$ så $\sum f_n(x)$ är divergent.

Om $x=-1$ så är f_n divergent, ty

$$f_n(-1)=\begin{cases}\infty & \text{om } n \text{ udda} \\ \frac{1}{2} & \text{om } n \text{ jämn.}\end{cases}$$

Antag nu att $|x|>1$. Då $x^n \to \infty$, så $f_n(x) \to 0$. Detta ger en möjlighet till konvergens.

Eftersom $|x^n+1|>|x^n|$ så följer det att

$$\left|\frac{1}{x^n+1}\right| < \left|\frac{1}{x^n}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|^n$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ är en konvergent geometrisk serie så följer det att $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x^n+1}\right|$ är konvergent, dvs att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ är absolut konvergent. Detta betyder att $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ även är konvergent.

Vi har kommit fram till att

$\sum \frac{1}{x^n+1}$ är – absolut konvergent, och då även konvergent för $|x|>1$

– divergent för $|x|\leq 1$.

Är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n+1}$ likformigt konvergent?

Eftersom likformig konvergens implicerar konvergens så behöver vi endast testa likformig konvergens på $(1,\infty)$ och om inte detta gäller så får vi testa på $[a,\infty)$, $a>1$.

Observera att $\frac{1}{x^n+1} \to 0$ punktvis på $(1,\infty)$.

men $\sup_{x\in(1,\infty)} \left|\frac{1}{x^n+1} - 0\right| = \frac{1}{2} \not\to 0$ så konvergensen

är <u>inte</u> likformig. Men konvergensen på $[a,\infty)$, $a>1$ är **likformig** ty

$$\sup_{[a,\infty)} \left|\frac{1}{x^n+1} - 0\right| = \frac{1}{a^n+1} \to 0 \text{ då } n\to\infty.$$

Man kan även visa att $\sum f_n$ konvergerar likformigt på $[a,\infty)$ $a>1$ men inte på $(1,\infty)$.

Att fundera på: (Visa eller motbevisa)

$f_n \to f$ likformigt på I

$\Longleftrightarrow$

$\sum f_n$ konvergerar likformigt på I.

- Gäller någon implikation, eller båda?
- Kan likformig konvergens $f_n \to f$ på I samtidigt som $\sum f_n$ konvergerar likformigt på någon annan mängd? Gäller det omvända?
- Likformig konvergens $f_n \to f$, kan detta implicera, om inte vi redan har ekvivalens, att $\sum f_n$ konvergerar <u>endast</u> punktvis? Omvänt?. Alternativ formulering?

Försök att undersöka om något av dessa påståenden är sann eller inte. Tag hjälp av funktionsföljderna som vi tidigare gick igenom för att få svar på några av frågorna.

Om vi använder oss av resultaten angående likformig konvergens för funktionsföljder så får vi följande resultat angående funktionsserier.

Sats:

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ och antag att $f_n : I \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Om $\sum f_n$ konvergerar likformigt till f på I, då är f kontinuerlig på I.

Sats:

Antag att $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ är Riemannintegrerbara. Om $\sum f_n$ konvergerar likformigt mot f på $[a,b]$, då är f Riemannintegrerbar på $[a,b]$ och

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n .$$

Sats:

Låt $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ och antag att f_n' existerar på $[a,b]$.
Antag att det finns en punkt $x_0 \in [a,b]$ så att $\sum f_n(x_0)$ konvergerar punktvis, och antag att $\sum f_n'$ konvergerar likformigt på $[a,b]$.

Då finns en funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ så att
$\sum f_n \to f$ likformigt på $[a,b]$ och $f' = \sum f_n'$.

Ex:

Låt $f_n : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f_n(x) = x^n$$

Observera att för varje fixt $x \in [0, 1/2]$ så $x^n \to 0$.
Det är inte så svårt att se att $\sum f_n$ konvergerar likformigt på $[0, 1/2]$ och att

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Enligt satsen på sidan 28 så gäller att

$$\int_0^{1/2} f_n = \int_0^{1/2} x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$$

och

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} f_n(x)\,dx \underset{\text{Satsen}}{=} \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,dx = \begin{bmatrix} y = 1-x \\ dy = -dx \end{bmatrix} = -\int_1^{1/2} \frac{dy}{y} = \int_{1/2}^{1} \frac{dy}{y} =$$

$$= \left[\ln y\right]_{1/2}^{1} = \ln 1 - \ln 1/2 = \ln 2.$$

Man kan alltså t.ex. använda detta till att beräkna besvärliga serier!

Kom ihåg att $\mathbb{R}$ med Euklidisk metrik är ett fullständigt metriskt rum, dvs varje Cauchy följd konvergerar. Eftersom alla konvergenta följder är Cauchy i alla metriska rum så gäller följande i $\mathbb{R}$ (och även i $\mathbb{C}$):

$$\{x_n\} \text{ konvergent i } \mathbb{R}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\{x_n\} \text{ Cauchy i } \mathbb{R}.$$

Observation:

För funktions följder gäller därför:

$$f_n \to f \text{ punktvis}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f_n \text{ Cauchy punktvis.}$$

Q: Kan vi göra något analogt för likformig konvergens?

<u>Svar:</u> $f_n \to f$ likformigt på M

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq K \Rightarrow \sup_{p \in M} |f_n(p) - f_m(p)| < \varepsilon.$$

dvs f_n är likformigt Cauchy.

Korresponderande definition/resultat för funktionsserier är

$\sum f_n$ konvergerar likformigt på M

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall n, m : n > m \geq K \Rightarrow \sup_{p \in M} \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(p) \right| < \varepsilon.$$

dvs $\sum f_n$ är likformigt Cauchy.

Nästa resultat är användbart då man ska avgöra likformig konvergens för funktionsserier.

Sats: (Weierstrass M-test)

Om $\sup_{p \in M} |f_k(p)| \leq M_k$ för en funktionsföljd f_n, och antag att $\sum M_k$ konvergerar. Då konvergerar $\sum f_k$ likformigt på M.

Bevis:

Tag $\varepsilon > 0$. Eftersom $\sum M_k$ konvergerar så uppfyller denna serie ett Cauchy-villkor, dvs $\exists K \in \mathbb{N}$ så att för alla n, m med $n > m \geq K$ så gäller att

$$(*) \qquad \sum_{k=m}^{n} M_k < \varepsilon.$$

Tag nu n, m så att $n > m \geq K$. Då gäller att

$$\sup_{p \in M} \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(p) \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Triangelolikheten}}}{\leq} \sup_{p \in M} \sum_{k=m}^{n} |f_k(p)| \leq \sum_{k=m}^{n} \underbrace{\sup_{p \in M} |f_k(p)|}_{\leq M_k} \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n} M_k \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{<} \varepsilon.$$

Alltså: $\sum f_k$ likformigt Cauchy och därför är $\sum f_k$ likformigt konvergent på M. $\square$

Ex:

Betrakta $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definierade genom

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx}.$$

Vi ska se att $\sum f_n$ konvergerar likformigt.

Vi börjar med att studera funktionsföljden f_n.

Derivering av f_n ger:

$$f_n'(x) = 2x\, e^{-nx} - x^2 n e^{-nx} = e^{-nx} x(2 - nx).$$

Vi har alltså kritiska punkter då $x = 0$ eller $x = \frac{2}{n}$.

Observera vidare att

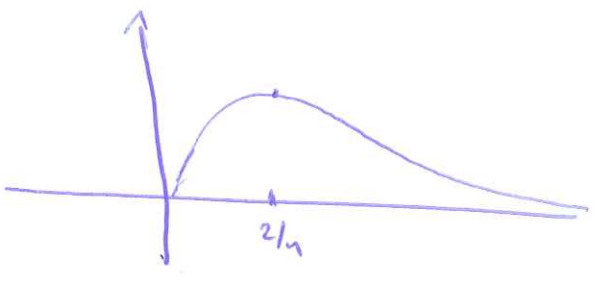
$$\lim_{x\to\infty} \cancel{x}e^{-nx} = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

$$f(0) = 0$$

och

$$f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-n\frac{2}{n}} = \frac{4}{n^2} e^{-2}$$

Dessa tre observationer gör att f_n:s graf ser ut som



Detta betyder att

$$\sup_{x \in [0,\infty)} |f_n(x)| = f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2}.$$

Men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} e^{-2} = 4e^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Weierstrass M-test ger nu att $\sum f_n$ konvergerar likformigt på $[0, \infty)$.

Potensserier

En viktig typ av funktionsserier är potensserier;

Då är $f_k(z) = a_k (z - z_0)^k$ och vi betraktar

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad ; \; z_0, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}.$$

där z är en komplex variabel.

Q: När konvergerar en potensserie?

Påstående:

Till varje potensserie $\sum a_n(z-z_0)^n$ finns en så kallad konvergensradie R där $0 \le R \le \infty$ så att om

$|z-z_0|<R \Rightarrow \sum a_n(z-z_0)^n$ är absolutkonvergent
$|z-z_0|>R \Rightarrow \sum a_n(z-z_0)^n$ är divergent.

Vi ska reda ut om begreppet konvergensradie är veldefinierat, och se vad konvergensradien verkligen är. I uträkningarna nedan så låter vi $z_0=0$.

För att veta att konvergensradie är veldefinierat så måste vi se att $\sum a_k z^k$ konvergerar för något z:

Obs 1:

Låt $z=0$. Då är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0$, så serien $\sum a_k z^k$ är absolutkonvergent.

Obs 2:

Om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ endast konvergerar för $z=0$ så

betyder det att konvergensradien är 0, ty serien

är absolutkonvergent för $|z|<0$ medan divergent
$\Leftrightarrow$
$z=0$

då $|z|>0$.

Sats:

Antag att det finns ett $w \neq 0$ så att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$

konvergerar. Då gäller att om $|z|<|w|$ så är

$\sum a_n z^n$ absolutkonvergent.

Bevis:

Säg att $z = c \cdot w$ där $|c|<1$, då gäller att

$$|z| = |c \cdot w| = |c| \cdot |w| < 1 \cdot |w| = |w|$$

Eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ konvergerar så måste

$$a_n w^n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$

Så för stora n så måste

(*) $$|a_n w^n| < 1 \Leftrightarrow |a_n| < \frac{1}{|w|^n}$$

För stora n gäller därför

$$(**) \quad |a_n z^n| = |a_n||z^n| \underset{(*)}{\leq} \left|\frac{1}{w^n}\right| |z|^n = \frac{|cw|^n}{|w|^n} = |c|^n.$$

Eftersom $|c|<1$ så konvergerar

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c|^n$$

Därför får vi enligt $(**)$ att

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \sum_{n=0}^{\infty} |c|^n < \infty$$

vilket betyder att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ är absolut konvergent. $\square$

Låt nu

$$R = \sup\left\{ |w| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \text{ konvergerar} \right\}.$$

Då vet vi enligt föregående sats att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ är absolut konvergent för alla $|z|<R$. Eftersom R var det största $|w|$ så att $\sum a_n w^n$ konvergerar, så måste $|z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n$ divergent. Alltså är konvergensradie ett veldigt objekt!

Sats:

Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existerar, är detta gränsvärde lika med konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Q: Är konvergensradien relaterad till likformig konvergens för funktionsserien (potensserien)

Svar: Ges i nästa sats.

Sats:

Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradie R och antag att $0 < r < R$. Då konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ likformigt på $\overline{B}(0,r)$, dvs för $|z| \leq r$.

Bevis:

Tag w med $r < |w| < R$. Låt $M_n = |a_n w^n|$. Enligt antagande så konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$. Vidare om $z \in \overline{B}(0,r)$ så är

$$|a_n z^n| \leq |a_n w^n| = M_n$$

Weierstrass M-test ger nu att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergerar likformigt på $\overline{B}(0,r)$.

□

Följd:

Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradie R så konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut och likformigt på varje kompakt delmängd till $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Bevis:

Eftersom $\overline{B}(0,r)$ är både sluten och begränsad för varje r (så speciellt för $0 < r < R$), så ger Heine-Borels sats att $\overline{B}(0,r)$ är kompakt. Nu ger föregående sats slutsatsen.

□

Vi kan nu använda satsen om likformig konvergens på potensserier:

Sats:

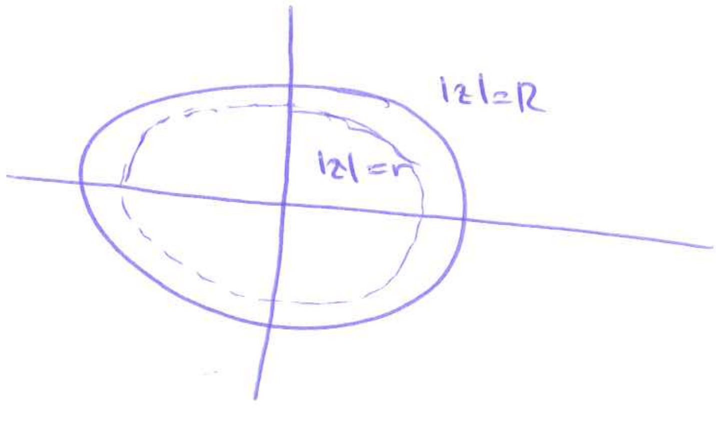
Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradie $R>0$.

Då är $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definierad och kontinuerlig på $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Bevis:

Eftersom konvergensen är likformig på alla slutna bollar så är den funktion som potensserien konvergerar mot kontinuerlig, ty $a_n z^n$ är kontinuerlig för varje n.

Bild:



Sats:

Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradie $R>0$. Om $a,b\in\mathbb{R}$ med $|a|,|b|<R$ och $a<b$ så är $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ integrerbar på $[a,b]$ och en primitiv funktion till f är

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Sats:

Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ har konvergensradie $R>0$. Låt $f(x):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Om $|x|<R$ så existerar $f'(x)$ och $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Anmärkning:

Så i en konvergent potensserie kan man både derivera och integrera termvis.

Ex:

Vi ska studera potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$, så $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Vi har att

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{k}} = \sqrt{1} = 1.$$

Därför har potensserien konvergensradie 1.
Så funktionen $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ är definierad och kontinuerlig på $B(0,1)$ enligt satsen på sidan 41.
Enligt andra satsen på sidan 42 så kan vi derivera termvis:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1} \sqrt{k}\, x^{k-1} = \sum_{k=0} \sqrt{k+1}\, x^k$$

Även denna potensserie har konvergensradie 1, ty

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}} = 1.$$

Vi vet att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ konvergerar för $|x|<1$, men vad har vi för konvergens ~~för~~ för $|x|=1$.

Vi ska kolla på några olika fall.

1) $x=1$

2) $x=-1$

3) $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$ men $|x|=1$, dvs $x=e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$.

1: $x=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ som är divergent.

2: $x=-1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ som är betingad konvergent eftersom $\frac{1}{\sqrt{k}}>0$ är avtagande och $\frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ då $k \to \infty$.

3: Kom ihåg Dirichlets sats:

Antag att $\{x_n\}$ är en avtagande följd med $x_n \to 0$ och antag att partialsummorna för $\sum y_n$ är begränsade, då konvergerar serien $\sum x_n y_n$.

Vi ska visa att partialsummorna för $\sum_{k=0}^{\infty} e^{i\theta k}$ är begränsade, för då kan vi använda Dirichlets sats för att se att $\sum \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ är konvergent för $x=e^{i\theta}$.

Vi vet att partialsummorna för $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ges av

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Så om $x = e^{i\theta}$ då är

$$|s_n| = \frac{|1-x^{n+1}|}{|1-x|} = \frac{|1-(e^{i\theta})^{n+1}|}{|1-e^{i\theta}|} = \frac{|1-e^{i\theta(n+1)}|}{|1-e^{i\theta}|}$$

$$\leq \frac{|1| + |e^{i\theta(n+1)}|}{|1-e^{i\theta}|} \underset{\uparrow}{=} \frac{1+1}{|1-e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} < \infty$$

$|e^{i\theta(n+1)}| = 1 \ \forall n$

så $|s_n|$ är begränsad.

Ex:

Formellt sätt så är $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Låt oss kolla på potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Vi har att

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right| = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty,$$

dvs potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ har oändlig konvergensradie. Detta betyder att $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ är definierad och kontinuerlig på $\mathbb{C}$. Eftersom vi kan derivera termvis så har vi att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x).$$

Alltså är $f(x)$ deriverbar på $\mathbb{R}$, och man kan sluta sig till att $f(x) = e^x$. Man kan faktiskt definiera e^x som potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$!