Föreläsning 8

I denna föreläsning ska vi diskutera flervariabliga funktioner igen. Denna föreläsning täcker två satser, nämligen Inversa funktionssatsen och Implicita funktionssatsen.

Vi måste börja med lite terminologi.

<u>Definition</u>. (C^1-avbildning)

Låt $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vara öppen och antag att $f: U \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar (se föreläsning 5 sidan 31).

Vi säger att f är <u>kontinuerligt differentierbar</u> på U om f' är kontinuerlig som avbildning $U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, där $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ är rummet av linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Vi säger att f är en <u>C^1-avbildning</u> och skriver $f \in C^1(U)$.

Observation:

Om $f \in \mathcal{C}^1(U)$ så betyder det att $J(f)(x)$ existerar i varje $x \in U$, dvs de partiella derivatorna existerar. (se föreläsning 5 sidan 35).

Låt oss formulera Inversa funktionssatsen, så ska vi diskutera dess innehåll senare.

Sats: (Inversa funktionssatsen)

Låt $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vara öppen och antag att $f: U \to \mathbb{R}^n$ är en $\mathcal{C}^1$-avbildning. Antag att $f'(a)$ är inverterbar för något $a \in U$ och att $b = f(a)$. Då gäller att

i) det finns öppna mängder $V \ni a$ och $W \ni b$ i $\mathbb{R}^n$ så att $f|_V$ är injektiv och att $f(V) = W$.

ii) $f^{-1}: W \to V$ är en $\mathcal{C}^1$-avbildning på W.

Anmärkning:

a) Att $f'(a)$ är inverterbar betyder att $J(f)(a)$ är inverterbar, dvs Jacobideterminanten $\det(J(f)(a)) \neq 0$.

b) I (i) så är $f|_V$ injektiv och $f(V) = W$, men detta betyder att $f|_V : V \to W$ är bijektiv. Så Inversa funktionssatsen säger att om $f \in C^1(U)$ och $f'(a)$ är inverterbar, så är f lokalt bijektiv kring a.

c) I (ii) så vet vi inte att f^{-1} existerar globalt!

d) Vi får ingen formel

Observation:

Låt $y = f(x)$; $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$.

Slutsatsen i Inversa funktionssatsen ger nu att

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f(x_1, \dots, x_n \end{cases}$$

kan lösas för $x_1, \dots, x_n$ i termer av $y_1, \dots, y_n$ om vi betraktar tillräckligt små omgivningar till $a \in U$ och $b = f(a)$.
Lösningen är då unik och C^1.

Vi ska inte bevisa Inversa funktionssatsen, ty beviset ligger utanför denna kurs. Vi ska däremot betrakta några exempel.

Ex:

Vad säger Inversa funktionssatsen i en variabel. Antag att $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ är en C^1-avbildning och att $f'(x_0) \neq 0$ för något $x_0 \in (a,b)$. Säg att $f'(x_0) > 0$, och eftersom f' är kontinuerlig så är $f'(x) > 0$ för x nära x_0. Därför är f strikt växande, och en invers existerar nära x_0, som är slutsatsen i Inversa funktionssatsen.

Ex:

Låt $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom $f(x) = x^2$. Då är $f'(x) = 2x$ så $f \in C^1(\mathbb{R})$. Eftersom $(f')^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ så är f' inverterbar. Nu ger Inversa funktionssatsen att det finns en öppen mängd $V \subseteq \mathbb{R}$ (som är $(0,\infty)$) och en öppen mängd $W \subseteq \mathbb{R}$ (som också är $(0,\infty)$) så att $f|_V : V \to W$ är bijektiv. Detta ger existensen av $\sqrt{x}$ och att $\sqrt{x}$ är $C^1(0,\infty)$

Ex:

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara definierad genom

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

Då är

$$J(f)(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

och $\det(J(f)(x,y)) = (e^x)^2 \cos^2 y + (e^x)^2 \sin^2 y =$

$$= e^{2x} \underbrace{(\cos^2 y + \sin^2 y)}_{=1} = e^{2x} \neq 0.$$

Alltså Jacobideterminanten är aldrig noll, så Inversa funktionssatsen ger att f är lokalt inverterbar i varje punkt. Observera att f <u>inte</u> är globalt bijektiv, ty den är <u>inte</u> globalt injektiv:

t.ex: $f(0, \pi/2) = f(0, \frac{5\pi}{2}) = (0,1)$

Ex:

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Då är f deriverbar och $f'(0) > 0$.
Men vi kan inte använda Inversa funktionssatsen ty f' är inte kontinuerlig. f är inte inverterbar i någon omgivning till origo.
Detta exempel visar att antagandet på att f är C^1 är ett måste i Inversa funktionssatsen.

Nästa sats vi ska betrakta är Implicita funktionssatsen:

<u>Sats:</u> (Implicita funktionssatsen)

Låt $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ vara en öppen mängd och
låt $f : U \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-avbildning på U.

Antag att $(a,b) \in U$ så att $f(a,b) = 0$.

Antag även att avbildningen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, given av

$$t \longmapsto \underbrace{\underbrace{J(f)(a,b)}_{n \times (m+n)} \underbrace{\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}}_{(m+n) \times 1}}_{\in \mathbb{R}} \quad 0 \in \mathbb{R}^m$$

är inverterbar.

Då finns det öppna mängder $V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ och $W \subseteq \mathbb{R}^m$
med $(a, \underline{b}) \in V$ och $b \in W$ så att

till varje $y \in W$ finns ett <u>unikt</u> x så
att $(x,y) \in V$ och $f(x,y) = 0$

Detta ger upphov till en implicit definierad
funktion $g_y : W \to \mathbb{R}^n$ så att $g_y \in C^1(W)$

i) $g_y(b) = a$

ii) $f(g_y(z), z) = 0$

Ex: (Ur boken sid 227)

Låt $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ vara definierad genom $f = (f_1, f_2)$
$\qquad \overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3}$
där

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3$$

Om $a = (0,1)$ och $b = (3,2,7)$ så är

$$f_1(a,b) = 2e^0 + 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 3 = 0$$

och

$$f_2(a,b) = 1 \cos 0 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 7 = 0$$

Låt oss beräkna $J(f)(a,b)$. Vi har att

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2e^{x_1} \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = y_1 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a,b) = 3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = x_2 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a,b) = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = -4 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(a,b) = -4$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y_3}(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -x_2 \sin x_1 - 6 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a,b) = -6$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \cos x_1 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a,b) = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 2 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(a,b) = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_3} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial y_3}(a,b) = -1$$

Detta ger att

$$J(f)(a,b) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Betrakta avbildningen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given av

$$(t_1,t_2) = t \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

Denna avbildning är inverterbar, ty $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = 20 \neq 0$.

Vi kan nu använda Implicita funktionssatsen för att hitta en C^1-avbildning g i en omgivning till $(3,2,7) \in \mathbb{R}^3$ så att $g(3,2,7) = (0,1)$ och så att

$$f(g(z), z) = 0.$$

Anmärkning:

Om vi antar att avbildningen $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$$t \mapsto J(f)(a,b) \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \quad 0 \in \mathbb{R}^n$$

är inverterbar så finns det en C^1-avbildning g så att

$$f(x, g(x)) = 0$$

Detta sker förstås lokalt precis som i Implicita funktionssatsen.

Ex:

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara given av $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Då är $f(1,1) = 0$. Vidare så är $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$

och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$ och avbildningen

$$t \mapsto [2 \;\; 2]\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = 2t$$

inverterbar. Nu ger Implicita funktionssatsen att det finns en funktion g i en omgivning av $x = 1$ så att

$$f(x, g(x)) = 0$$

I detta fall så kan vi hitta g explicit, nämligen

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ty

$$f(x, g(x)) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0.$$

Ex:

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara given av $f(x,y) = x^2y + 3y^3x^4 - 4$.

Låt $(a,b) = (1,1)$ varvid $f(a,b) = 0$. Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2\cdot 1 + 12 \cdot 1^3 \cdot 1^3 = 14$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1^2 + 9 \cdot 1^2 \cdot 1^4 = 10$$

Avbildningen

$$t \mapsto \begin{bmatrix} 14 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = 10t$$

är inverterbar så Implicita funktionssatsen ger att det finns en funktion g i en omgivning till $x=1$ som är C^1 och så att

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{(på denna omgivning)}$$

Trots att vi inte vet vad funktionen $y = g(x)$ är så kan vi hitta dess derivata, genom implicit derivering:

$$2xy + x^2y' + 12y^3x^3 + 9y^2y'x^4 = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$g'(x) = y' = -\frac{2xy + 12y^3x^3}{x^2 + 9y^2x^4} \quad (y = g(x))$$