

Hållfasthetslära med partiella differentialekvationer - föreläsningsanteckningar till matematikdelen

Egmont Porten

Som kurslitteratur använder vi

TORBJÖRN ERIKSSON m. fl.: Fysikens matematiska metoder, 3. upplagan, 2001
Teoretisk fysik, KTH

Per Gradin och Egmont Porten tackar KTH:s grupp i teoretisk fysik för tillståndet
att dela ut kopior.

1 Föreläsning 1: Inledning till partiella differentialekvationer

1.1 Partiella differentialekvationer

En differentialekvation är en ekvation som innehåller en funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ och ändligt många av deras partiella derivator. Om $u = u(x)$ är en envariabel-funktion så kallas ekvationen för *ordinär*. Om u beror på flera variabler så kallas ekvationen för *partiell*.

Exempel för partiella differentialekvationer:

- (1) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplaceekvation),
- (2) $u_{xx} - u_{tt} = 0$ (Vågekvation),
- (3) $u_{xx} + u_{yy} = g$, $g = g(x, y)$ en given funktion (Poisson ekvation),
- (4) $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ (Korteweg-deVries-ekvation),
- (5) $u_t = u_{xx} - uu_x$ (Burgers ekvation).

En *linjär* differentialekvation är en differentialekvation $T = 0$ där T kan skrivas som en summa av en given funktion $g(x_1, \dots, x_n)$ och uttryck av formen

$$a(x_1, \dots, x_n) \times (\text{partiell derivata av } u),$$

t.ex. xy^2u_{xxy} eller $(x + y)u$. Ovan är **(1-3)** linjära men **(4-5)** är icke-linjära.

En linjär ekvation kallas för *homogen* om $g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$, annars kallas den för *inhomogen*.

I exemplet ovan är **(1-2)** homogena, **(3)** är inhomogen (om $g(x, y)$ inte är konstant 0).

Övning: Klassificera följande ekvationer: $u_{tt} - u_{xx} - (u^2/2 + u_{xx})_{xx} = 0$ (Boussinesq), $u_t - itu_x$ (Mizohata), $u_t - u_{xx} - g = 0$ (värmeledning).

En funktion u är en lösning till en differentialekvation på ett område D om alla derivator som förekommer i ekvationen är definierade på D och uppfyller differentialekvationen. För att undvika patologiska fall är det förnuftigt att kräva till och med att u är C^k -glatt¹ där k är ekvationens grad.

Övning: Visa att

a) $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ löser Laplaceekvationen på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

¹Förkortningen C^k menar att de partiella derivatorna upp till grad k är kontinuerliga.

b) $t+x^2/2$ och $e^{-x^2/(4t)}/(2\sqrt{\pi t})$ löser värmeledningsekvationen. På vilka mängder gäller det?

1.2 Klassiska ekvationer och problem i två variabler

Vi presenterar ekvationerna utan fysikalisk härledning.

1.2.1 Vågekvationen på hela axeln

Vi vill lösa

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{1}$$

med u föreskriven för $t = 0$. Vi ska se att det är möjligt att föreskriva både u och dess tidsderivata u_t längs $t = 0$. Vi söker alltså en lösning $u = u(t, x)$ till (1) som uppfyller begynnelsevillkoren

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x),$$

med givna funktioner $u_0(x)$, $v_0(x)$.

Steg 1: Varje lösning till (1) kan skrivas som $u(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$.

Skriv om (1) som

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0. \tag{2}$$

Vi betraktar variabelbytet

$$\begin{aligned} \xi &= x + t, \\ \eta &= x - t, \end{aligned}$$

som är ekvivalent med

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\xi + \eta), \\ t &= \frac{1}{2}(\xi - \eta), \end{aligned}$$

och härleder

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Med (2) inser vi att (1) är ekvivalent med

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

För en lösning u är $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ oberoende av ξ , d.v.s.

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = h(\eta).$$

vad som medför (om lösningen är global) att

$$u(\xi, \eta) = u(\xi, \eta = 0) + \int_0^\eta h(s) ds = f(\xi) + g(\eta) = f(x + t) + g(x - t).$$

Steg 2: d'Alemberts lösningsformel. För att uppfylla begynnelsevillkoren måste vi arrangera att

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad (3)$$

$$f'(x) - g'(x) = v_0(x). \quad (4)$$

Integration av (4) ger

$$f(x) - g(x) = C + \int_a^x v_0(s) ds, \quad (5)$$

där a och C är relaterade enligt $C = f(a) - g(a)$.

Lösningen till det linjära ekvationssystemet (3), (5) är

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \int_a^x v_0(s) ds + C \right), \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \int_a^x v_0(s) ds - C \right). \end{aligned}$$

Oberoende av valet för a får vi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x + t) + g(x - t) \\ &= \frac{1}{2} \left(u_0(x - t) + u_0(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} v_0(s) ds \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Vår konstruktion ger följande

Sats 1.1 Om $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ och $v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ så definierar (6) en \mathcal{C}^2 -glatt lösning på hela planet \mathbb{R}^2 . För givna begynnelsevillkor u_0 och v_0 är lösningen unik.

Anmärkning 1.2 Satsen innebär att det betraktade problemet är *rätt ställt* (correctly posed):

- En lösning existerar (existens).
- Lösningen är entydig (entydighet).
- Lösningen beror kontinuerligt av givna data (stabilitet).

Vi nämnar några klassiska exempel för rätt ställda problem.

1.2.2 Värmeledningsekvation

Vi betraktar värmeledningsekvationen

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0$$

med brynnelsevillkoret

$$u(x, 0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Om u_0 ligger i ett lämpligt funktionsrum är problemet rätt ställt och lösningen kan beräknas enligt

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(x') e^{-(x'-x)^2/4t} dx'.$$

Observera att $u(x, t)$ inte är definierad för $t \leq 0$.

1.2.3 Laplaceekvation

Låt D vara ett begränsat område i \mathbb{R}^2 med glatt rand ∂D (d.v.s. att ∂D är förening av ändligt många glatta slutna kurvor). Vi betrakta följande randvärdesproblem (Dirichletproblem):

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (7)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \partial D. \quad (8)$$

(7) kallas för Laplaceekvationen, (8) för Dirichletrandvillkoret. Dirichletproblemet är lösbart om det finns, för varje kontinuerlig funktion $u_0(x, y)$ definierad på ∂D , en funktion $u(x, y)$ som är glatt på D , kontinuerlig på $\overline{D} = D \cup \partial D$ och uppfyller (7) och (8).

1.3 Klassifikation av linjära differentialekvationer

Betrakta en andragsradsekvation

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

med en obekant funktion $u = u(x, y)$, en given funktion $g = g(x, y)$ och reella koefficienter a, b, \dots, f . Diskriminanten är uttrycket

$$\Delta = b^2 - ac.$$

Ekvationen kallas för

1. *elliptisk* om $\Delta < 0$,
2. *hyperbolisk* om $\Delta > 0$,
3. *parabolisk* om $\Delta = 0$.

I synnerheten är Laplaceekvationen elliptisk, vågekvationen hyperbolisk och värmeledningsekvationen parabolisk.

Sats 1.3 *För en ekvation med konstanta reella koefficienter finns alltid ett linjärt koordinatbyte sådant att den kvadratiske delen av den transformerade ekvationen blir lika med:*

1. $u_{xx} + u_{yy}$, om $\Delta < 0$,
2. $u_{xx} - u_{yy}$, om $\Delta > 0$,
3. u_{xx} , om $\Delta = 0$.

En ekvation med variabla koefficienter kan byta typen. T.ex. är $u_{xx} + x^3u_{yy} = 0$ elliptisk för $x < 0$, hyperbolisk för $x > 0$ och parabolisk längs y -axeln $\{x = 0\}$.

2 Föreläsning 2: Fouriermetoden

2.1 Superpositionsprincipen

En homogen linjär PDE skriver vi kort som $\mathcal{L}u = 0$ (t.ex. $\mathcal{L} = \Delta$).

Sats 2.1 Om u_1, u_2 löser ekvationen $\mathcal{L}u = 0$ så är $Au_1 + Bu_2$ också en lösning för alla tal A, B .

För konkrithets skull bevisar vi det för värmeledningsekvationen $u_{xx} - u_t = 0$, d.v.s. $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$:

$$\mathcal{L}(Au_1 + Bu_2) = (Au_1 + Bu_2)_{xx} - (Au_1 + Bu_2)_t = A((u_1)_{xx} - (u_1)_t) + B((u_2)_{xx} - (u_2)_t) = 0$$

och satsen följer.

Övning 2.2 Visa att $u_1 + Au_2$ är en lösning till den inhomogena ekvationen $\mathcal{L}u = g$ om u_1 löser den och u_2 löser den motsvarande homogena ekvationen $\mathcal{L}u = 0$

2.2 Fourierserier

Vi vill approximera en funktion $u(x)$ på ett ändligt intervall $[0, L]$. Fourierkoefficienterna definieras som

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_m &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Under relativt milda förutsättningar konvergerar

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{L}$$

mot u . Alternativt kan man framställa u genom sinusserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

där koefficienter c_n beräknas enligt

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{u}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Här är \tilde{u} den udda utvidgningen av u till intervallet $[-L, L]$.

Det kan hända att Fourierserien inte konvergerar i alla x (till exempel i språngställen). Den exakta teorin är mycket subtil.

2.2.1 Värmeledningsekvationen på intervallet

Vi vill lösa värmeledningsekvationen

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{9}$$

med begynnelsevärden

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{10}$$

och randvärden

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{11}$$

För att få enklare formler betraktar vi $L = 1$.

Steg 1: Lösningar i produktform. För lösningar på formen $u(x, t) = X(x)T(t)$ blir (9)

$$X_{xx}T = XT_t,$$

som vi kan skriva (i punkter där $X \neq 0$ eller $T \neq 0$)

$$\frac{X_{xx}}{X} = \frac{T_t}{T}.$$

Eftersom den ena sidan är oberoende av t och den andra av x är båda lika med samma konstant C . Vi får

$$X_{xx} = CX, \tag{12}$$

$$T_t = CT. \tag{13}$$

Steg 2: Lösning av (12-13). För $C = 0$ får vi lösningar $ax + b$ varav bara nolllösningen uppfyller randvillkoren. För $C > 0$ får vi $a \cosh(\sqrt{C}x) + b \sinh(\sqrt{C}x)$ och randvillkoren igen ger $a = b = 0$.

För $C < 0$ lösningarna är $a \cos(\sqrt{-C}x) + b \sin(\sqrt{-C}x)$. Randvillkoret för $x = 0$ ger $a = 0$. Randvillkoret i $x = 1$ implicerar att $C = -(\pi n)^2$, $n = 1, 2, \dots$, och vi får som relevanta lösningar $\sin(n\pi x)$.

För T behöver vi bara lösa $T_t = -(\pi n)^2 T$ och får $T(t) = a e^{-(n\pi)^2 t}$.

Steg 3: Lösningssmetod för (9-15). Skrev u_0 som en sinusserie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x).$$

Den sökta lösningen är

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}. \quad (14)$$

Övning 2.3 Härled en lösningmetod för problemet (9), (10) med konstanta randvärden

$$u(0, t) = A, \quad u(1, t) = B, \quad t > 0. \quad (15)$$

Tips: Använd en lösning av formen $ax + b$.

2.2.2 Egenskaper av (14)

Lösningen (14) är definierad under milda förutsättningar, t.ex. om u_0 är styckvis kontinuerlig och uppfyller

$$\int_0^1 |u_0| dx = M < \infty. \quad (16)$$

I så fall gäller att $c_n \leq 2M$ och konvergensen

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x).$$

gäller i nästa varje $x \in [0, 1]$.

$$(16) \Rightarrow \left| c_n \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t} \right| \leq 2M e^{-(n\pi)^2 t},$$

vad som medför:

- a) Lösningen är \mathcal{C}^∞ på $(0, 1) \times 0, \infty$ även om u_0 bara är styckvis kontinuerlig. Det menar också att värmeledningsekvationen med omvänd tid inte är ett rätt ställt problem.
- b) För $t \rightarrow \infty$ beter $u(x, t)$ sig asymptotiskt som $c_1 \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}$.

2.2.3 Den inhomogena värmeledningsekvationen

Nu vill vi lösa

$$u_{xx} - u_t = h(x, t) \quad (17)$$

med begynnelsevärden

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (18)$$

och randvärden

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (19)$$

Antag att

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x), \quad \phi_n(x) = \sin(n\pi x),$$

löser problemet och skrev

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x).$$

(17) blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-(n\pi)^2 a_n - \frac{da_n}{dt} - b_n \right) \phi_n = 0$$

Jämförelse av koefficienter \Rightarrow

$$\frac{da_n}{dt} + (n\pi)^2 a_n = -b_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

I det homogena fallet, d.v.s. $b_n \equiv 0$, är $e^{-(n\pi)^2 t}$ en lösning. För kvoten av lösningen till (20) och $e^{-(n\pi)^2 t}$ gäller

$$\frac{d}{dt} \left(a_n e^{(n\pi)^2 t} \right) = -b_n e^{(n\pi)^2 t}.$$

Integralkalkylens huvudsats \Rightarrow

$$a_n(t) e^{(n\pi)^2 t} - a_n(0) = - \int_0^t b_n(\tau) e^{(n\pi)^2 \tau} d\tau$$

eller

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-(n\pi)^2 t} - \int_0^t b_n(\tau) e^{-(n\pi)^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (21)$$

Formeln bestämmer $a_n(t)$ för alla $t > 0$ eftersom (18) ger

$$a_n(0) = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx. \quad (22)$$

Tillsammans ger (21) och (22) en metod för att konstruera lösningen.

2.3 Sammanfattning

Lösningsmetoderna in denna föreläsning beror på serieutvecklingar, närmare bestämt på möjligheten att hitta till varje förnuftig funktion $u(x)$ en sinusutveckling. Vi ska använda ett analogt tillvägagångssätt för funktioner $u(x, y)$ som är definierade på ett område $D \subset \mathbb{R}^2$.

Såsom ovan ska vi hitta en familj funktioner $\phi_n(x, y)$ som räcker för att framställa varje förnuftig funktion $u(x, y)$ som en serie

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x, y).$$

Vi ska hitta $\phi_n(x, y)$ som lösningar av differentialekvationer som dessutom uppfyller lämpliga randvillkor.

Vi har inte särskilt betonat att framställningen som sinusserie är entydig eftersom det är välkänt från Fourierteori. I allmänheten kräver denna aspekt en detaljerad behandling.

3 Föreläsning 3

3.1 Randvärdesproblem till Helmholtzekvationen

Helmholtzekvationen är

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + k^2\Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (23)$$

Vi ska betrakta den för ett begränsat område $D \subset \mathbb{R}^2$ och kräva på randen S ett av följande randvillkor

$$\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{Dirichletvillkor}) \quad (24)$$

$$\nabla\Psi(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{Neumannvillkor}). \quad (25)$$

Vi antar att S är glatt och betecknar med $\hat{\mathbf{n}}$ den yttre normalvektorn på S med längd 1.

Sats 3.1 Om $\Psi(\mathbf{r})$ uppfyller

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + \lambda\Psi(\mathbf{r}) = 0$$

för en konstant λ och ett av villkoren 24 eller 25 så gäller $\lambda \geq 0$.

Bevis: Vi ska visa att vart och ett av villkoren (24) och (25) ger

$$\int_D \Psi\Delta\Psi \, dxdy = - \int_D \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi \, dxdy \quad (26)$$

Satsen är en direkt konsekvens ty

$$0 \geq - \int_D \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi \, dxdy = \int_D \Psi\Delta\Psi \, dxdy = -\lambda \int_D |\Psi|^2 \, dxdy.$$

Eftersom $\int_D |\Psi|^2 \, dxdy \geq 0$ följer $\lambda \geq 0$.

För att inse (26) tillämpar vi Greens sats

$$\int_S P \, dx + Q \, dy = \iint_D (Q_x - P_y) \, dxdy,$$

som ger för $P = -\Psi\Psi_y$, $Q = \Psi\Psi_x$

$$\begin{aligned} & \int_S (-\Psi\Psi_y \, dx + \Psi\Psi_x \, dy) \\ &= \iint_D (\Psi_y\Psi_y + \Psi\Psi_{yy} + \Psi_x\Psi_x + \Psi\Psi_{xx}) \, dxdy \\ &= \iint_D \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi \, dxdy + \iint_D \Psi\Delta\Psi \, dxdy. \end{aligned} \quad (27)$$

Om $\Psi = 0$ på S försvinner $\int_S (-\Psi\Psi_y dx + \Psi\Psi_x dy)$ och (26) följer.

För att utnyttja Neumannvillkoret parametriserar vi S genom båglängden σ . Vi tar alltså en parametrisering $(x(t), y(t))$ så att hastighetsvektorn $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ pekar i positiv riktning och har längd 1. Sedan gäller

$$\hat{\mathbf{n}}(x(t), y(t)) = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$$

och därmed

$$\int_S \Psi \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma = \int_S (-\Psi\Psi_y dx + \Psi\Psi_x dy).$$

Alltså följer (26) från (27). \square

Anmärkning 3.2 Sats 3.1 är en positivitetsegenskap av $-\Delta$ eftersom $-\Delta\Psi = \lambda\Psi$ kan uppfattas som en egenvärdesekvation. Satsen säger att egenvärdena λ är icke-negativa.

3.2 Helmholtzekvation på skivan och Besselfunktioner

Eftersom vårt huvudmål är att lösa (23) på skivor är det naturligt att använda polära koordinater.

3.2.1 Δ i polära koordinater

För polära koordinater r, ϕ gäller

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial}{\partial y}$$

I matrisnotation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\frac{1}{r} \sin \phi \\ \sin \phi & \frac{1}{r} \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nu visar en direkt räkning

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}.$$

3.2.2 Egenfunktioner

I polära koordinater skrivs Helmholtzekvationen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + k^2 \Psi = 0. \quad (28)$$

För att $\Psi = \Psi(r, \phi)$ är en funktion på (en del av) planet måste

$$\Psi(r, \phi) = \Psi(r, \phi + 2\pi m)$$

gälla för alla heltal m .

Produktansatsen $\Psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ leder till

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + k^2 = 0$$

eller

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 k^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} \quad (29)$$

med vinkelvillkoret

$$\Phi(r, \phi) = \Phi(r, \phi + 2\pi m), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Båda sidor av (29) liknar en konstant ν . Tillsammans ger $\Phi'' = \nu\Phi$ och (30) att $\nu = -n^2$ med $n \in \mathbb{Z}$ och

$$\Phi(\phi) = A \cos(n\phi) + B \sin(n\phi).$$

För R får vi Besselekvationen

$$r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - n^2) R = 0.$$

Enligt härledningen betraktar vi den för $r > 0$ och $n \in \mathbb{Z}$. Om $R_n(r)$ är en lösning så löser

$$R_n \cos(n\phi), \quad R_n \sin(n\phi) \quad (31)$$

Helmholtzekvationen (28). Eftersom $R_n(r)$ i allmänheten bara är definierad för $r > 0$ kan det hända att lösningen (31) inte är definierad i origo. Därför kräver vi dessutom att $R_n(r)$ tillåter en kontinuerlig utvidgning i $r = 0$.

Studiet av Besselekvationen förenklas² genom koordinatbytet $x = kr$ som ger

$$x^2 R'' + x R' + (x^2 - n^2) R = 0 \quad (32)$$

Som en ordinär andragsradsekvation har (32) en allmän lösning beror på två parametrar. Man vet att en enparameterfamilj AJ_n bara tillåter kontinuerlig

²Så blir vi av med spektralparametern k från (23).

utvidgning i $r = 0$. Sådana funktioner kallas också Besselfunktioner av första slaget.

För att hitta ett element J_n i familjen börjar vi med ansatsen

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left(\frac{x}{2}\right)^j$$

och får

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vi sammanfattar de viktigaste egenskaperna:

- Efter kontinuerlig utvidgning gäller $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = J_2(0) = \dots = 0$.
- J_n har oändligt många *positiva* nollställen

$$0 < j_{n1} < j_{n2} < \dots$$

som alla är olika.

- Vi har

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + E_n(x)$$

$$\text{med } |E_n(x)| \leq \frac{C_n}{x^{3/2}}.$$

Om vi kräver Dirichletvillkoret $\Psi(1, \phi) = 0$ får vi följande lösningar till (28):

$$\Psi_{ns}^I(r, \phi) = J_n(j_{ns}r) \cos(n\phi), \quad n = 0, 1, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (33)$$

$$\Psi_{ns}^{II}(r, \phi) = J_n(j_{ns}r) \sin(n\phi), \quad n = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Alltså får två linjärt oberoende funktioner Ψ_{ns}^I och Ψ_{ns}^{II} till egenvärdena $k = j_{ns}$, $n \geq 1$. För egenvärdena $k = j_{0s}$, $s = 0, 1, \dots$, får vi en funktion $J_0(j_{0s}r)$.

Observera att Ψ_{ns}^I och Ψ_{ns}^{II} motsvarar samma egenvärde j_{ns} .

Vi säger att två reella funktioner $u(x, y)$, $v(x, y)$ på skivan $\{x^2 + y^2 < 1\}$ är *ortogonala* om $\iint_{x^2+y^2<1} u(x, y)v(x, y) dx dy = 0$.

Sats 3.3 *Två olika funktioner i (33), (34) är ortogonala.*

Bevis: Om Ψ_1 och Ψ_2 är två av dessa funktioner som motsvarar olika egenvärden $j_1 \neq j_2$ beräknar vi

$$j_1 \iint_{x^2+y^2<1} \Psi_1 \Psi_2 dx dy = \iint_{x^2+y^2<1} (\Delta \Psi_1) \Psi_2 dx dy = - \iint_{x^2+y^2<1} \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Psi_2 dx dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 < 1} \Psi_1 \Delta \Psi_2 \, dx dy = j_2 \iint_{x^2+y^2 < 1} \Psi_1 \Psi_2 \, dx dy,$$

vad som ger $\iint_{x^2+y^2 < 1} \Psi_1 \Psi_2 \, dx dy = 0$. Dessutom

$$\iint_{x^2+y^2 < 1} \Psi_{ns}^I \Psi_{ns}^{II} \, dx dy = \int_0^1 (J_n(j_{ns}r))^2 r \, dr \int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \sin(n\phi) \, d\phi = 0,$$

vad som avslutar beviset.

3.2.3 Egensvängingar av ett membran

Vi betraktar

$$\Delta u - u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad (35)$$

med randvillkor

$$u(x, y, t) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (36)$$

I polära koordinater blir det

$$u(1, \phi, t) = 0$$

och vi får två extravillkor för periodicitet och kontinuitet i origo:

$$u(r, \phi, t) = u(r, \phi + 2\pi, t), \quad u(r, \phi, t) < \infty.$$

Separationsansatsen $u(r, \phi, t) = \Psi(r, \phi)T(t)$ i (35)

$$\Rightarrow \frac{\Delta \Psi}{\Psi} = \frac{T_{tt}}{T} = -k^2.$$

Andra delen $T_{tt} = -k^2 T$ ger

$$T(t) = A \cos(kt) + B \sin(kt)$$

Som i (37) leder ansatsen $\Psi(r, \phi) = \mathbb{R}(r)\Phi(\phi)$ till lösningar

$$R_n(A \cos(n\phi) + B \sin(n\phi))$$

där $n \in \mathbb{Z}$ och R_n löser Besselekvationen

$$r^2 R_n'' + r R_n' + (k^2 r^2 - n^2) R_n = 0.$$

Eftersom R_n är begränsad nära $r = 0$ är den en Besselfunktion av första slaget $CJ_n(kr)$. Slutligen menar $R_n(1) = 0$ att k måste tillhöra J_n :s nollställen

$$j_{n1} < j_{n2} < \dots$$

Totalt har vi hittat lösningarna

$$J_n(j_{nl}r) \text{vin}_1(n\phi) \text{vin}_2(j_{nl}t) \quad (37)$$

där $\text{vin}_1, \text{vin}_2$ är \cos eller \sin .

3.2.4 Serieutveckling

För en funktion $u = u(x, y)$ definierad på skivan $x^2 + y^2 < 1$ betraktar vi problemet att framställa u genom en serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns} \Psi_{ns}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns} \Psi_{ns}^{II}. \quad (38)$$

Funktionalanalys lär oss att detta kan göras (för förnuftiga funktioner u) om funktionerna Ψ_{ns}^I är parvis ortogonala (se sats 3.3) och bildar en fullständig bas till ett lämpligt Hilbertrum. För bakgrunden om Hilbertrumteori och fullständighet av systemet $\{\Psi_{ns}^I, \Psi_{ns}^{II}\}$ hänvisar vi till kapitel 4 och avsnitt 5.9 i kursboken.

Alltså är en entydig framställning (38) möjlig. Koefficienterna a_n, b_n ges genom

$$a_{ns} = \frac{\iint_{x^2+y^2<1} u(x, y) \Psi_{ns}^I(x, y) dx dy}{\iint_{x^2+y^2<1} |\Psi_{ns}^I(x, y)|^2 dx dy}, \quad (39)$$

$$b_{ns} = \frac{\iint_{x^2+y^2<1} u(x, y) \Psi_{ns}^{II}(x, y) dx dy}{\iint_{x^2+y^2<1} |\Psi_{ns}^{II}(x, y)|^2 dx dy}. \quad (40)$$

Anmärkning 3.4 a) Serieutveckling som ovan är en generalisering av framställning med avseende på ortogonaler baser $\{v_1, \dots, v_k\}$ av \mathbb{R}^k . I så fall definieras ortogonalitet med avseende på skalärprodukten $u \cdot v$. För en godtycklig vektor gäller

$$v = \sum_{n=1}^k a_n v_n \text{ med } a_n = \frac{v \cdot v_n}{v_n \cdot v_n} = \frac{v \cdot v_n}{\|v_n\|^2}.$$

I våra formler spelar

$$(u, v) = \iint_{x^2+y^2<1} u(x, y) v(x, y) dx dy$$

rollen av skalärprodukten.

b) Sinusutvecklingen i avsnitt 2.2 är ett exempel för utveckling genom fullständiga ortogonalbaser.

3.2.5 Begynnelsevärdesproblem

Nu vill vi lösa (35) med randvillkor (36) och föreskrivna värden $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ och $u_t(x, y, 0) = v_0(x, y)$. För enkelhets skull antar vi $v_0 = 0$.

Som i föregående avsnitt skriver vi

$$u_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns} \Psi_{ns}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns} \Psi_{ns}^{II}.$$

Eftersom $v_0 = 0$ använder vi bara $\cos(n\phi)$ -termer och får lösningen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns} \Psi_{ns}^I \cos(n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns} \Psi_{ns}^{II} \cos(n\phi).$$

4 Föreläsning 4: Fundamentallösningar

4.1 Elektrostatik

Vårt mål är att lösa den 3-dimensionella Poissonekvationen

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = g(x, y, z). \quad (41)$$

En fysikalisk tolkning är att $g(x, y, z)$ är en laddning och u den motsvarande potentialen.

För en isolerad laddning e i origo genererar kraftfältet

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}$$

med $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En potential till \mathbf{E} är Newtonpotentialen

$$G = G(\mathbf{r}) = \frac{e}{r}.$$

Man kollar nämligen utan problem att

$$\mathbf{E} = -\nabla G.$$

Naturligtvis finns en 1-parameterfamilj potentialer $G(\mathbf{r}) + C$. Bland dem är G den unika potentialen med

$$G(\mathbf{r}) \rightarrow 0, \quad \text{om } r \rightarrow \infty.$$

Om laddningen sitter i punkten \mathbf{r}_0 får man fältet

$$\frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

och potentialen

$$\frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

För att inse att punktladdningar och deras potentialer uppfyller (41) behöver vi funktioner som representerar punktladdningar.

4.2 Impulsfunktioner

Impulsfunktioner är inte vanliga funktioner som är definierade genom funktionsvärden i alla punkter i \mathbb{R}^3 . Vi konstruerar standardimpulsfunktionen (eller Diracfunktionen) δ som gränsvärdet av

$$T_\epsilon(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} & \text{om } r \leq \epsilon, \\ 0 & \text{om } r > \epsilon. \end{cases}$$

Observera att vi har

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} T_\epsilon(\mathbf{r}) \, dx dy dz = 1$$

för alla $\epsilon > 0$. Eftersom vi deriverar egenskaper av δ som gränsvärde av egenskaper av T_ϵ får vi

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) \, dx dy dz = 1.$$

Allmännare vi får

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx dy dz = \varphi(0)$$

för varje kontinuerlig funktion $\varphi(\mathbf{r})$.

Vi definierar impulsfunktionen $\delta_{\mathbf{r}_0}$ med enhetsimpuls i $(\mathbf{r})_0$ som gränsvärdet av $T_\epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ och får

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx dy dz = \varphi(\mathbf{r}_0).$$

För impulsfunktionen $a\delta_{\mathbf{r}_0}$ med styrka a gäller

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} a\delta_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx dy dz = a \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx dy dz = \varphi(\mathbf{r}_0).$$

Räkningar med Diracfunktioner genomför man enligt följande princip: En kontinuerlig funktion $f(\mathbf{r})$ är känd om vi känner värdena

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx dy dz$$

för alla testfunktioner $\varphi(\mathbf{r})$, d.v.s. för alla glatta funktioner som försvinner utanför en tillräckligt stor boll. Analogt kan man betrakta δ -funktionen som den generaliserade funktion som ger $\phi(0)$ som evaluering för en testfunktion.

Nu uttrycker vi räkneoperationer genom integration efter multiplikation med testfunktioner. Ett exempel är x -derivatan: För en \mathcal{C}^1 -funktion f gäller

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx dy dz &= \int_{-R}^R dy \int_{-R}^R dz \left(\int_{-R}^R \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx \right) \\ &= \int_{-R}^R dy \int_{-R}^R dz \left(- \int_{-R}^R f(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}) \, dx \right) = - \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}) \, dx dy dz \end{aligned} \quad (42)$$

där $R > 0$ är så stort att φ försvinner utanför $\{|x| < R\} \times \{|y| < R\} \times \{|z| < R\}$. Analogt får vi för δ -funktionen

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \delta}{\partial x}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \, dx dy dz = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{r}) \, dx dy dz = -\phi_x(0)$$

Alltså är $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ den generaliserade funktion som ger $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0)$ som evaluering för en testfunktion φ .

4.3 Newtonpotentialen

Sats 4.1 Newtonpotentialen $G_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}$ uppfyller

$$\Delta G_0 = -\delta. \quad (43)$$

Först tolkar vi (43): För en \mathcal{C}^2 -funktion u och en testfunktion φ gäller

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \Delta u \varphi \, dx dy dz = \iiint_{\mathbb{R}^3} u \Delta \varphi \, dx dy dz. \quad (44)$$

Detta följer från (42) och analoge identiteter för $\frac{\partial}{\partial y}$ och $\frac{\partial}{\partial z}$. Enligt (44) betyder (43) att vi har

$$-\varphi(0) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G_0 \Delta \varphi \, dx dy dz = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \iiint_{|\mathbf{r}| > \epsilon} G_0 \Delta \varphi \, dx dy dz$$

för varje testfunktion φ .

Bevis av Sats 4.1: För en fixerad testfunktion φ väljer vi $R > 0$ så stort att φ försvinner utanför $\{|\mathbf{r}| < R\}$. För $0 < \epsilon < R$ gäller

$$\begin{aligned} & \iiint_{|\mathbf{r}| > \epsilon} G_0 \Delta \varphi \, dx dy dz \\ &= \iiint_{\epsilon < |\mathbf{r}| < R} G_0 \Delta \varphi \, dx dy dz - \iiint_{\epsilon < |\mathbf{r}| < R} \Delta G_0 \varphi \, dx dy dz \\ &= \iiint_{\epsilon < |\mathbf{r}| < R} \operatorname{div}(G_0 \nabla \varphi - \varphi \nabla G_0) \, dx dy dz \\ &= \iint_{|\mathbf{r}| = \epsilon} G_0 \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_{|\mathbf{r}| = \epsilon} \varphi \nabla G_0 \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= I_\epsilon - II_\epsilon. \end{aligned}$$

Tredje likheten följer från Gauss' divergenssats och \mathbf{n} är den normalvektor på sfären $\{|\mathbf{r}| = \epsilon\}$ som har längd 1 och pekar mot origo.

Eftersom

$$\iint_{|\mathbf{r}| = \epsilon} G_0 \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{|\mathbf{r}| < \epsilon} \operatorname{div}(\nabla \varphi) \, dx dy dz = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{|\mathbf{r}| < \epsilon} \Delta \varphi \, dx dy dz$$

och

$$\iiint_{|\mathbf{r}| < \epsilon} |\Delta \varphi| \, dx dy dz \leq \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 \max_{\mathbb{R}^3} |\Delta \varphi|$$

får vi $I_\epsilon \rightarrow 0$ för $\epsilon \downarrow 0$.

Vi beräknar

$$\nabla G_0 = \nabla \frac{1}{4\pi r} = -\frac{1}{4\pi r^3} \mathbf{r} \Rightarrow \nabla G_0 \cdot \mathbf{n} = \left(-\frac{1}{4\pi r^3}\right) \mathbf{r} \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi r^2}.$$

Eftersom $\text{area}(\{r = 1\}) = \frac{1}{4\pi}$ och ϕ är kontinuerlig

$$II_\epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{|\mathbf{r}|=\epsilon} \varphi dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{|\mathbf{r}|=1} \varphi\left(\frac{\mathbf{r}}{\epsilon}\right) dS \rightarrow \varphi(0).$$

4.4 Poissonekvationen i hela rummet

Vi antar att $g(x, y, z)$ är en \mathcal{C}^2 -funktion som försvinner utanför en tillräckligt stor boll. Vi vill lösa Poissonekvationen

$$\Delta u(x, y, z) = g(x, y, z) \quad (45)$$

med en funktion $u(x, y, z)$ sådan att

$$u(x, y, z) \rightarrow 0 \text{ om } r = |(x, y, z)| \rightarrow \infty \quad (46)$$

För två funktioner $f(\mathbf{r})$ och $h(\mathbf{r})$ definierar vi faltningen

$$(f * h)(\mathbf{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dx' dy' dz' = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') h(\mathbf{r}') dx' dy' dz'.$$

Observera att

$$(g * \delta)(\mathbf{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dx' dy' dz' = g(\mathbf{r})$$

Faltning av (43) ger

$$g(\mathbf{r}) = (g * \delta)(\mathbf{r}) = -(g * \Delta G_0)(\mathbf{r}) = -\Delta(g * G_0)(\mathbf{r}).$$

Här följer sista likheten från

$$\left(f * \frac{\partial h}{\partial x}\right)(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(f * h)(\mathbf{r}) \quad (47)$$

och analoga identiteter för $\frac{\partial}{\partial x}$ och $\frac{\partial}{\partial z}$. Högerledet i (47) är

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h(\mathbf{r} + (\epsilon, 0, 0) - \mathbf{r}') - h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon} dx' dy' dz' \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}') (h(\mathbf{r} + (\epsilon, 0, 0) - \mathbf{r}') - h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dx' dy' dz' \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((f * h)(\mathbf{r} + (\epsilon, 0, 0)) - (f * h)(\mathbf{r})) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f * h)(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Sammanfattat har bevisat en del av följande

Sats 4.2 Om $g(x, y, z)$ är en \mathcal{C}^2 -funktion som försvinner utanför en tillräckligt stor boll så är faltningen $-g * G_0$ \mathcal{C}^2 -glatt och uppfyller (45) och (46).

Bevis: Det stannar att kolla (46). Eftersom $g(x, y, z)$ försvinner utanför en tillräckligt stor boll $B_R(0)$ gäller

$$K = \max_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3} |g(x, y, z)| = \max_{(x,y,z) \in B_R(0)} |g(x, y, z)| < \infty$$

För $|(x, y, z)| > R$ får vi

$$|-g * G_0(x, y, z)| \leq \frac{K}{4\pi(|(x, y, z)| - R)} \rightarrow 0$$

om $|(x, y, z)| \rightarrow \infty$ vad som medför (46) \square

4.5 Poissonekvationen på bollen

På enhetsbollen

$$B = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| < 1\}$$

med rand

$$S = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| = 1\}$$

betraktar vi Poissonekvationen

$$\Delta u(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in B \tag{48}$$

med randvillkoret

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S. \tag{49}$$

I det homogena fallet $g(x, y, z) \equiv 0$ kan lösningen uttryckas genom integralformeln

$$u(\mathbf{r}) = \iint_S P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \tag{50}$$

med Poissonkärnan

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}.$$

I det inhomogena fallet antar vi att $g(x, y, z)$ är \mathcal{C}^2 -glatt i en omgivning $\{r < 1 + \epsilon\}$ av $B \cup S$. Efter multiplikation med en lämplig funktion kan vi dessvidare anta att $g(x, y, z)$ försvinner för $r > 1 + \epsilon$. Sats 4.2 ger en funktion $v(x, y, z)$ som uppfyller

$$\Delta v(x, y, z) = g(x, y, z)$$

på hela rummet. För att korrigera randvillkoren löser vi problemet

$$\begin{aligned}\Delta w(x, y, z) &= 0 & \text{om } (x, y, z) \in B \\ w(x, y, z) &= u_0(x, y, z) - v(x, y, z) & \text{om } (x, y, z) \in S\end{aligned}$$

m.h.a. (50) och får lösningen till (48), (49) som

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) + w(x, y, z).$$

Anmärkning 4.3 Problemet (48), (49) är inte bara lösbart för bollar. Redan för begränsade områden med glatt rand blir beviset betydligt svårare eftersom en explicit lösning till det homogena problemet som (50) saknas.

5 Föreläsning 5: Variationskalkyl

5.1 Brachistochronproblemet

År 1696 betraktade Johan Bernoulli följande problem: en partikel med massa m glider friktionsfritt från en punkt $A = (a, y_0)$ till en punkt $B = (b, y_1)$ inom det vertikala x, y -planet. Vi antar att tyngdkraften verkar i riktningen av y -axeln (den pekar alltså nedåt!), att $a < b$, $y_0 < y_1$ och att partikeln startar från vila. Problemet är att hitta den deriverbara kurva $y(x)$ sådan att partikeln behöver den kortaste möjliga tiden.

Kurvans bågändselement är

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

och dess hastighet är

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Eftersom energin

$$\frac{mv^2}{2} - mgy$$

är konstant och lika med $-mgy_0$ för $x = 0$ vi får

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mg(y - y_0)$$

och falltiden från A till B blir

$$T = \int_{T_A}^{T_B} dt = \int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y - y_0}} dx.$$

Vi kan anta $y_0 = 0$ och har att hitta kurvan $y(x)$ sådan att integralen

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} dx$$

blir minimal.

5.2 Variationsproblem

För en \mathcal{C}^2 -funktion $F = F(x, q, p)$ betraktar vi integralen

$$I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$$

som en *funktional* på mängden $\mathcal{C}^1([a, b])$, d.v.s. som en avbildning

$$\begin{aligned} I : \mathcal{C}^1([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto I[y]. \end{aligned}$$

Målet är att hitta extremalfunktioner, d.v.s. funktioner som minimerar eller maximerar $I[y]$. Ofta lägger vi till *randvillkor* som

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1 \tag{51}$$

i brachistochronproblemet.

5.3 Euler-Lagrange-ekvationen

För en given funktion $y = y(x)$ betraktar vi en 1-parameter-variation

$$\tilde{y}(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x) \tag{52}$$

där vi uppfattar $\eta(x) \in \mathcal{C}^1([a, b])$ som en störning. Om randvillkoret (51) gäller kräver vi att

$$\eta(a) = 0, \quad \eta(b) = 0. \tag{53}$$

Om y extremerar $I[y]$ så är $\alpha = 0$ ett lokalt extremum av funktionen $\alpha \mapsto I[y(x) + \alpha\eta(x)]$ och för dess derivata gäller

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I[y(x) + \alpha\eta(x)] = 0. \tag{54}$$

En *stationär funktion* är en funktion y sådan att (53) gäller för alla störningar η .

Anmärkning 5.1 Vi har sett att varje extremalfunktion är stationär. Omvändningen gäller inte. Situationen är analog till kritiska punkter av en funktion. De kan också vara sadelpunkter.

Vid första ögonkastet verkar det vara mycket komplicerat att verifiera (54) för *alla* tillåtna störningar ty de varierar inom ett vektorrum av oändlig dimension. Ändå visar följande sats att det räcker att kolla en differentialekvation som inte beror på η !

Sats 5.2 *Vi betraktar en funktional $I[y]$ med randvillkoren (51). Då är en \mathcal{C}^2 -funktion $y = y(x)$ stationär om och endast om Euler-Lagrange-ekvationen*

$$F_q(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_p(x, y, y') = 0 \tag{55}$$

gäller.

Högersidan av (55) är en funktion i x . Andra termen blir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} F_p(x, y(x), y'(x)) \\ &= F_{px}(x, y(x), y'(x)) + y'(x)F_{pq}(x, y(x), y'(x)) + y''(x)F_{pp}(x, y(x), y'(x)). \end{aligned}$$

Ett utförligare sätt att skriva (55) är alltså

$$F_q - F_{px} - y'F_{pq} - y''F_{pp} = 0.$$

Den är en ordinär andragsdifferentiallekvation.

Anmärkning 5.3 I litteraturen betecknar man ofta de oberoende variablerna av F med x , y och y' . Det betyder att man använder y och y' både som oberoende variabler i F och som symboler för en okänd funktion och dess derivata. T.ex. blir Euler-Lagrange-ekvationen till

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Senare ska vi också använda denna förkortning.

Bevis av sats 5.2: För en störning η med (53) ger partiell integration

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I[y(x) + \alpha\eta(x)] \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \int_a^b F(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)) dx \\ &= \int_a^b \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} F(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)) dx \\ &= \int_a^b (F_q(x, y, y')\eta + F_p(x, y, y')\eta') dx \\ &= \int_a^b \left(F_q(x, y, y') - \frac{d}{dx}F_p(x, y, y') \right) \eta dx. \end{aligned}$$

Om $y(x)$ uppfyller (55) så försvinner $\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I[y(x) + \alpha\eta(x)]$ för varje η . Om $y(x)$ är stationär följer (55) från variationskalkylens huvudlemma.

Lemma 5.4 Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och

$$\int_a^b f(x)\eta(x) dx = 0$$

gäller för varje funktion $\eta \in \mathcal{C}^2([a, b])$ med $\eta(a) = \eta(b) = 0$ så är f konstant 0.

Bevis: Om $f(x_0) \neq 0$ i en $x_0 \in (a, b)$ så finns $\epsilon > 0$ sådant att $a < x_0 - \epsilon < x_0 + \epsilon < b$ och $f(x)$ inte byter tecken i $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Om en funktion $\eta(x) \geq 0$ är positiv i x_0 och 0 utanför $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ så följer

$$\int_a^b f(x)\eta(x) dx \neq 0.$$

Beviset är klart. \square

5.4 Första integraler

I många tillämpningar (som brachistochronen) beror F inte explicit på x , d.v.s.

$$F = F(q, p).$$

I så fall är

$$E(p, q) = F(p, q) - pF_p(p, q)$$

en *första integral* av Euler-Lagrange-ekvationen, d.v.s. att

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}(F(y, y') - y'F_p(y, y')) \\ &= y'F_q(y, y') + y''F_p(y, y') - y''F_p(y, y') - (y')^2F_{qp}(y, y') - y'y''F_{pp}(y, y') \\ &= y' \left(F_q(y, y') - \frac{d}{dx}F_p(y, y') \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

gäller för varje lösning $y = y(x)$.

För att bestämma den allmänna lösningen får vi följande strategi:

- a) Skriv om $E(y, y') = c$ för att få

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(y, c).$$

- b) Från $dx = dy/f(y)$ får vi en ekvation

$$x = \int dx = \int dy/f(y, c) + d$$

som vi löser för y . Observera att vi får två integrationskonstanter c, d .

Exempel 5.5 För brachistochronen får vi

$$F(q, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{q}}, \quad E(q, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{q}} - \frac{p^2}{\sqrt{q(1+p^2)}} = \frac{1}{\sqrt{q(1+p^2)}}$$

Från $E(u, u') = c$ får vi $y = \frac{1}{c^2(1+(y')^2)}$ och

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{c^2 y} - 1} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{c^2 y} - 1}}$$

$$\Rightarrow x = d + \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{c^2 y} - 1}} = d + \int \frac{c\sqrt{y} dy}{\sqrt{1 - c^2 y}} = d + \frac{1}{c^2} \int \sqrt{\frac{\tau}{1 - \tau}} d\tau.$$

Substitutionen $\tau = \sin^2 \theta$, $d\tau = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ ger

$$\int \sqrt{\frac{\tau}{1 - \tau}} d\tau = 2 \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2 \int \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \tilde{d}$$

Alltså får vi

$$x = \frac{1}{c^2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + d$$

och

$$y = \frac{\tau}{c^2} = \frac{\sin^2 \theta}{c^2} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2c^2}.$$

Med $A = \frac{1}{2c^2}$, $\phi = 2\theta$ får vi

$$x = A(\phi - \sin \phi) + d, \quad y = A(1 - \cos \phi),$$

vad som är brachistochronens standardframställning.

5.5 Generaliseringar

5.5.1 Flera envariabelfunktioner

För en funktion

$$F(x, q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$$

söker vi stationära funktioner $y(x) = (y_1(x), \dots, y_N(x))$ med värden i \mathbb{R}^N till funktionalen

$$I[y_1, \dots, y_N] = \int_a^b F(x, y(x), \dots, y_N(x), y'(x), \dots, y'_N(x)) dx.$$

Om y :s värden i a och b är föreskrivna visar man som förut att $y(x)$ är stationär om och endast om systemet

$$F_{q_j}(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{p_j}(x, y, y') = 0$$

gäller för $j = 1, \dots, N$ och $a < x < b$.

5.5.2 Flera oberoende variabler

För en funktion

$$F(x, y, q, p_1, p_2)$$

söker vi stationära funktioner $u(x, y)$ till funktionalen

$$I[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$$

där D är ett begränsat område i \mathbb{R}^2 med glatt rand S . Om u 's randvärde på S är föreskrivna så är u stationär om och endast om den partiella differentialekvationen

$$F_q - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1}(x, y, u, u_x, u_y) - \frac{\partial}{\partial y} F_{p_2}(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

gäller för $(x, y) \in D$. Utförligare blir t.ex. andra termen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1}(x, y, u, u_x, u_y) &= F_{xp_1}(x, y, u, u_x, u_y) + u_x F_{qp_1}(x, y, u, u_x, u_y) \\ &+ u_{xx} F_{p_1 p_1}(x, y, u, u_x, u_y) + u_{xy} F_{p_1 p_2}(x, y, u, u_x, u_y). \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-ekvationen är ett medel att härleda fysikaliskt relevanta differentialekvationer.

Exempel 5.6 För

$$F = F(p_1, p_2) = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2), \quad F_{p_1} = p_1, \quad F_{p_2} = p_2$$

blir

$$F_q = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} F_{p_1}(x, y, u, u_x, u_y) = u_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} F_{p_2}(x, y, u, u_x, u_y) = u_{yy}.$$

Alltså är Euler-Lagrange-ekvationen ekvivalent med Laplaceekvationen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$