MT059G Egmont Porten
Hållfasthetslära med partiella differentialekvationer

Inlämningsuppgifter I

1. Visa att

a) $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ löser Laplaceekvationen på $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

b) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ löser Laplaceekvationen på $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0)\}$,

c) $t + x^2/2$ och $e^{-x^2/(4t)}/(2\sqrt{\pi t})$ löser värmeledningsekvationen för $t > 0$.

2. Vi betraktar den homogena vågekvationen

$$\Box\, u = u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{1}$$

på hela planet $\mathbb{R}^2$.

a) Bestäm funktionen $U(x,t)$ som d'Alemberts formel ger för begynnelsevärdena

$$U_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } |x| \le 1, \\ 0 & \text{om } |x| > 1. \end{cases}$$

och begynnelsehastigheten $V_0(x) \equiv 0$. Bekräfta att U bara antar ändligt många värden och skissera värdemängderna. Beskriv värdemängderna också i koordinaterna $\xi = x + t$, $\eta = x - t$.

b) Låt $u(x,t)$ vara en $\mathcal{C}^2$-glatt lösning av (1) och $\varphi(x,t)$ en $\mathcal{C}^2$-glatt funktion som försvinner utanför en kvadrat

$$Q_R = \{|x| \le R, |t| \le R\}.$$

Bevisa att

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\, \Box\, \varphi(x,t)\, dxdy = 0. \tag{2}$$

Tips: Partiell integration m.a.p. x och t.

Anmärkning: I föreläsning 5 ska vi bevisa omvändningen: Om (2) gäller för alla $\varphi(x,t)$ som försvinner utanför en tillräckligt stor kvadrat Q_r så uppfyller u vågekvationen. Alltså är (2) ett ekvivalent sätt att verifiera (1). Fördelen av (2) är att den också kan kollas för funktioner u som inte är $\mathcal{C}^2$.

c) Bevisa att $U(x,t)$ uppfyller (2) för varje $\mathcal{C}^2$-glatt funktion $\varphi(x,t)$ som försvinner utanför en tillräckligt stor kvadrat Q_r.

Tips: En möjlighet är att skriva U på formen $g(\xi) + h(\eta)$ och att att beräkna integralen efter variabelbyte till ξ, η. I alla fall borde man ta hänsyn till U:s värdemängder.

Lycka till!