MT059G | Egmont Porten
Hållfasthetslära med partiella differentialekvationer

Inlämningsuppgifter II

1. Låt

$$B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z) - (\hat{x},\hat{y},\hat{z})\| < r\}$$

vara den öppna bollen med centrum i $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ och radie $r > 0$.

a) I föreläsningen diskuteras integralformeln för harmoniska funktioner på enhetsbollen $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Hur förenklas formeln om vi skriver $u(0)$ som integral? Härled en motsvarande formel för bollen $B_r(0)$ med godtycklig radie och slutligen för bollar $B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ med godtycklig radie och godtyckligt centrum.

Tips: Funktionsvärdet är bollens centrum är integralen över bollens rand devidерad med randens yta. Man kan tolka det som funktionens medelvärde på randen.

b) Låt u vara harmonisk i $B_{r+\epsilon}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$. Visa att

$$\min_{(x,y,z)\in\partial B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})} u(x,y,z) \leq u(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \leq \max_{(x,y,z)\in\partial B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})} u(x,y,z)$$

c) Låt u vara som i **(b)** och antag dessutom att

$$u(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = \max_{(x,y,z)\in\partial B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})} u(x,y,z).$$

Visa att u är konstant på $B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$.

d) Låt u vara harmonisk på $D = B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ och kontinuerlig på avslutningen $\overline{D} = D \cup \partial D$. Visa att

$$\min_{(x,y,z)\in\partial D} u(x,y,z) \leq u(x',y',z') \leq \max_{(x,y,z)\in\partial D} u(x,y,z)$$

gäller för alla $(x',y',z') \in B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$.

Tips: För att få en motsägelse antar vi att uppskattningen inte gäller. Betrakta först fallet att det finn en punkt (x',y',z') sådan att

$$u(x',y',z') > \max_{(x,y,z)\in\partial D} u(x,y,z).$$

Låt $(x_0,y_0,z_0) \in B_r(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ vara en punkt där funktionsvärdet $u(x,y,z)$ blir maximalt. Visa m.h.a. **(c)** att u är konstant på varje boll i D med centrum i (x_0,y_0,z_0). Härled existensen av en punkt på randen där u är lika med $u(x_0,y_0,z_0)$. Varför är det en motsägelse?

Förklara kort vad man gör om det finns en punkt med

$$u(x',y',z') < \min_{(x,y,z)\in\partial D} u(x,y,z).$$

2. **a)** Bestäm Eulerekvationen för

$$F(x,p) = x^n p^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

och hitta de stationära funktionerna.

b) Bestäm första integralen $E(q,p) = F(q,p) - pF_p(q,p)$ för

$$F(q,p) = q\sqrt{1-p^2}$$

och tillämpar metoden från föreläsning 5, s. 13-14, för att beräkna de stationära funktionerna.

Tips: I **(b)** hjälper inversa trigonometriska substitutioner. Information hittar man i Adams, Essex: Calculus, avsnitt 6.3.

Lycka till!