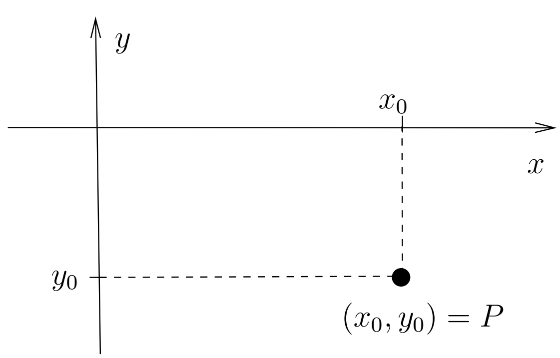
Egmont Porten
Mittuniversitet

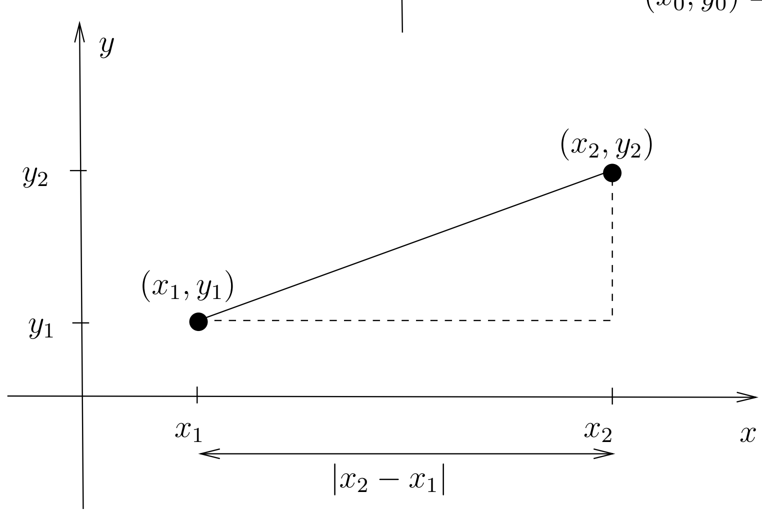
Föreläsningsanteckningar i flervariabelanalys

1 Differentialkalkyl

1.1 Punkter i $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

<u>$\mathbb{R}^2$:</u>





Enligt Pytagoras' lag är

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 = y_2)^2}$$

avståndet mellan $(x_1, y_1) = P_1$ och $(x_2, y_2) = P_2$.

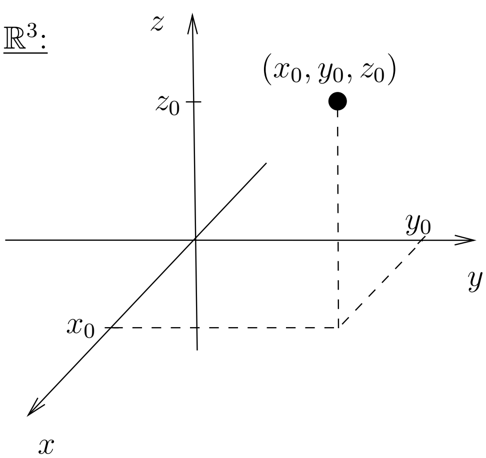
Mängderna

$$\begin{aligned} D_\epsilon(x_0,y_0) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\epsilon\} \\ \Big(\overline{D_\epsilon(x_0,y_0)} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le\epsilon\}\Big) \end{aligned}$$

kallas den öppna (slutna) skivan med centrum (x_0, y_0) och radie ϵ ($\epsilon > 0$).

Med $|(x,y)|$ betecknas avståndet $\sqrt{x^2+y^2}$ mellan (x,y) och origo.

<u>$\mathbb{R}^3$:</u>



avstånd

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

För $\epsilon > 0$,

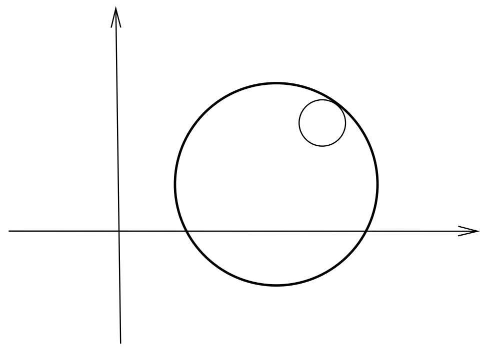
$$\begin{aligned} B_\epsilon(x_0,y_0,z_0) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\epsilon\} \\ \Big(\overline{B_\epsilon(x_0,y_0,z_0)} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\le\epsilon\}\Big), \end{aligned}$$

det öppna (slutna) klotet kring (x_0, y_0, z_0) med radie ϵ.

En mängd $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) kallas öppen om det finns, för varje punkt $P \in U$, en öppen skiva (klot) kring P (med positiv radie) som är en delmängd av U.

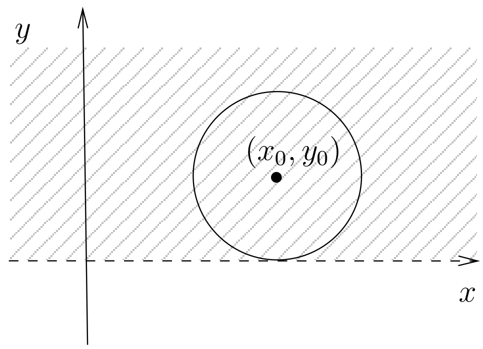
Exempel:

a) $D_\epsilon(x_0, y_0)$ är öppen.



$\overline{D_\epsilon(x_0, y_0)}$ är inte öppen, ty det inte finns en skiva för punkterna (x, y) med $x^2 + y^2 = \epsilon$.

b) $\{y > 0\}$ är öppen.



$\{y \geq 0\}$ är inte öppen, ty det inte finns en skiva för punkterna $(x, 0)$.

c) Den tomma mängden $\emptyset$ är öppen.

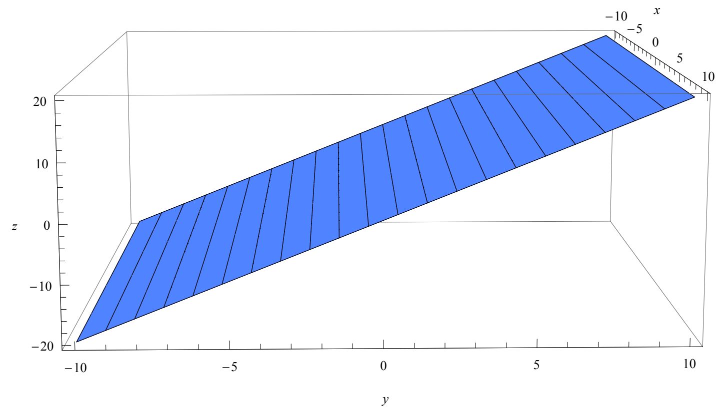
1.2 Funktioner av flera variabler

Definition: En funktion $f(x, y)$ är en avbildning som avbilder varje punkt (x, y) av en viss mängd $\mathcal{D}(f)$ på ett unikt tal $f(x, y)$. Mängden $\mathcal{D}(f)$ kallas f:s definitionsmängd.

Exempel:

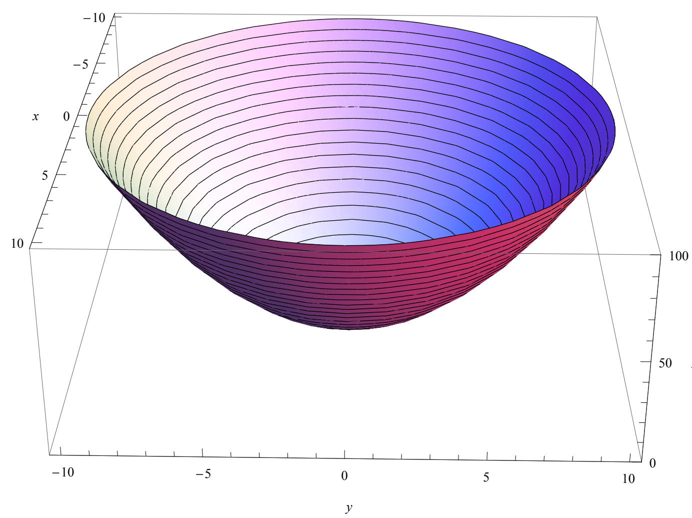
a) $f(x,y) = 2y$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

Grafen $z = 2y$
är ett plan i $\mathbb{R}^3$.



b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

Grafen är en
rotations-
paraboloid.



c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Uttrycket under roten blir negativt om $x^2 + y^2 > 9$, d.v.s. $\sqrt{x^2+y^2} > 3$.
Alltså är

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)| \leq 3\},$$

den slutna skivan av radie 3 kring origo.

<u>Nivåkurvan</u> till nivå C är mängden $f(x,y) = C$ (i andra ord $\{(x,y) \in \mathcal{D}(f) : f(x,y) = C\}$).

I ovanstående exempel:

a) $2y = C \Leftrightarrow y = C/2$. Nivåkurvan är en linje som är parallell med x-axeln och skär y-axeln i $C/2$.

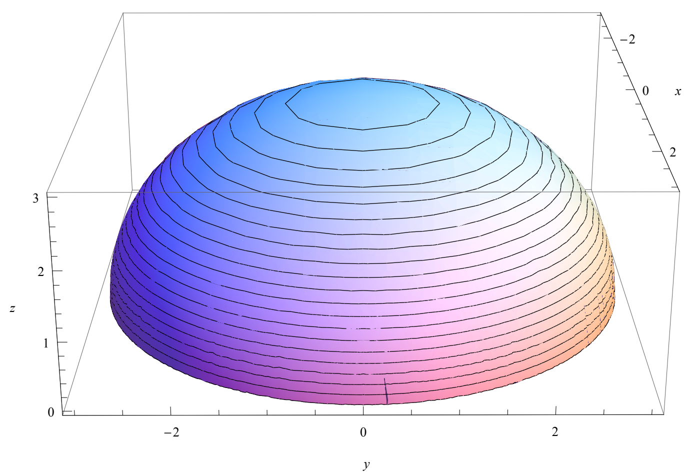
b) $x^2 + y^2 = C \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{C}$ (om $C \geq 0$)). För $C \geq 0$ är nivåkurvan en krets med centrum i origo och radie C.

För $C < 0$ är nivåkurvan tom.

c) $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = C$ har ingen lösning om $C < 0$. Om $C \geq 0$ är det ekvivalent till $x^2 + y^2 = 9 - C^2$. Det är bara lösbart om $C \leq 3$.

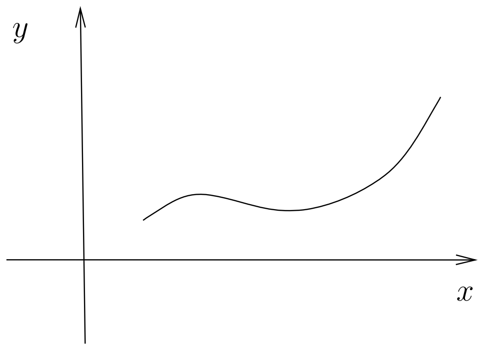
Om $0 \leq C \leq 3$ är nivåkurvan $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 - C^2}$, alltså kretsen kring origo med radie $\sqrt{9 - C^2}$. Annars är nivåkurvan tom.

Förresten kan vi också rita grafen till $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Om vi sätter $z = f(x, y)$, så gäller $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Alltså ligger (x, y, z) på randen av klotet $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 3$.

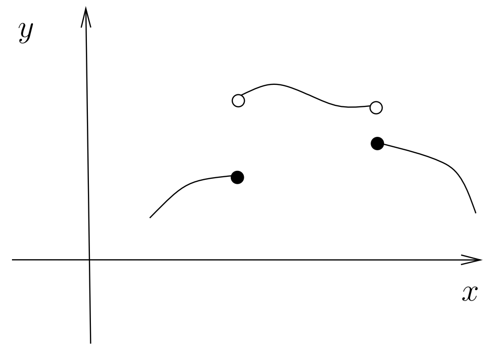


1.3 Kontinuitet

1 variabel: $f(x)$ kontinuerlig om f:s graf inte har några språngställen



kontinuerlig

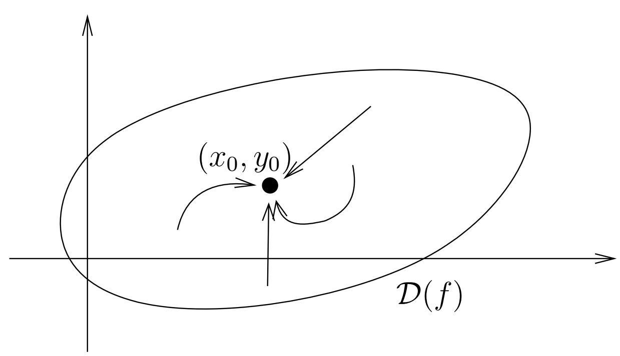


ej kontinuerlig

Närmare taget är $f(x)$ kontinuerlig i x_0 om $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2 variabler: Låt f vara definierad på en öppen mängd $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ och $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(f)$. $f(x, y)$ sägs vara kontinuerlig i (x_0, y_0) om $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

$(x, y) \to (x_0, y_0)$ betyder att $x \to x_0$ och $y \to y_0$ gäller samtidigt.



Exempel:

a) $f(x,y) = -xy^2$ är kontinuerlig i varje $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

ty:

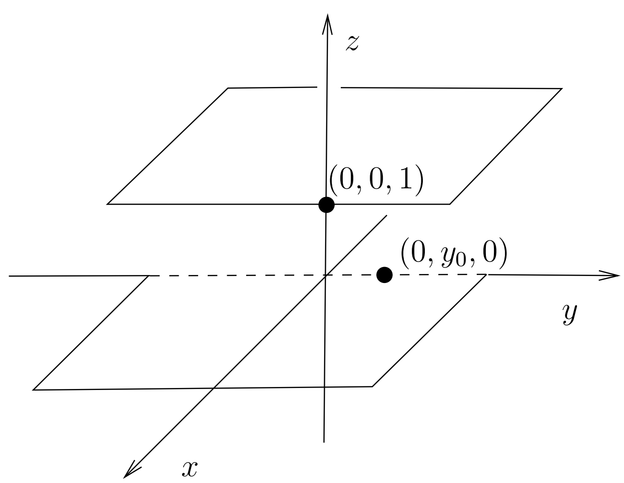
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (-xy^2) &= -\lim_{x\to x_0} x \lim_{y\to y_0} y^2 \\ &= -x_0 y_0^2 \end{aligned}$$

Övning: Rita grafen!

På ett liknande sätt bevisar man att alla polynom i två variabler (t.ex. $4x^2y^2 - 3xy + y^2 - 7$) är kontinuerliga på hela planet.

b) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

enkelt: f kontinuerlig i alla (x,y) sådana att $x_0 \neq 0$



Vi visar att $f(x,y)$ är diskontinuerlig i varje punkt $(0, y_0)$: Vi låter (x,y) sträva mot $(0, y_0)$ på ett särskilt sätt, nämligen

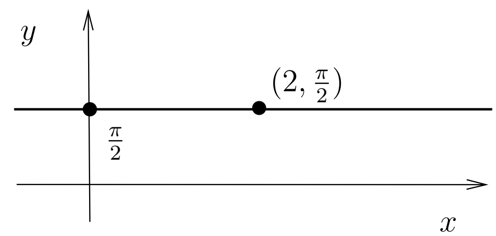
$$\begin{cases} x \to 0- & \text{(eller } x \uparrow 0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x, y_0) \overset{x \leq 0}{\equiv} \lim_{x\to 0-} 0 \neq 1 = f(0, y_0) \Longrightarrow f \text{ diskontinuerlig i } (0, y_0).$$

1.4 Partiella derivator

Hur snabbt växer $f(x,y) = x^2 \sin(y)$ i x-riktning i punkten $(2, \frac{\pi}{2})$?

- Vi håller y konstant $= \frac{\pi}{2}$ och betraktar $g(x) = f(x, \frac{\pi}{2}) = x^2$.
- Derivera $g(x)$ i $x = 2$: $g'(2) = 4$.



Vi kan skriva resultatet som gränsvärde

$$\begin{aligned} g'(2) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(2+h, \frac{\pi}{2}) - f(2, \frac{\pi}{2})}{h} \end{aligned}$$

Analogt kan vi också derivera i y-riktning. Då betraktar vi $h(y) = f(2,y) = 4\sin(y)$ och får $h'(\frac{\pi}{2}) = 4\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Ovan har vi bestämt partiella derivator i en särskild punkt. Nu låter vi $f(x,y)$ vara en funktion med öppen definitionsmängd $\mathcal{D}(f)$ och deriverar för varje $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}. \end{aligned}$$

I stället för $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, den partiella derivatan med avseende på x, skriver vi också

$$f_x(x,y) \qquad \text{eller} \qquad f_1(x,y) \text{ (Adams).}$$

För $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ skriver vi också $f_y(x,y)$ eller $f_2(x,y)$.

De flesta partiella derivatorna kan beräknas m.h.a. följande regel.

Regel: För att bestämma $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, behandla y som en konstant och derivera med avseende på x!

Exempel: $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2) + y$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \exp(x^2 + y^2), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x \exp(x^2 + y^2) + 1.
\end{aligned}$$

I tre variabler håller vi både y och z fasta för att bestämma $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Exempel: $f(x, y) = x^2 y^3 z - y^2 x + z$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2xy^3 z - y^2, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 3x^2 y^2 z - 2xy, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= x^2 y^3 + 1.
\end{aligned}$$

1.5 Högre derivator

Låt $f(x, y)$ vara definierad på en öppen mängd $\mathcal{D}(f)$. Om $\frac{\partial f}{\partial x}$ existerar också i varje $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$, så kan vi söka de partiella derivatorna till $\frac{\partial f}{\partial x}$. De betecknas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy}.
\end{aligned}$$

Analogt inför vi f_{yx} och f_{yy}.

Exempel: $f(x,y) = x^2 \sin(y)$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Vi får $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(y)$ som är definierad på $\mathbb{R}^2$. Alltså

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\sin(y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x\cos(y).$$

Analogt $f_y = x^2\cos(y)$, $f_{xy} = 2x\cos(y)$, $f_{yy} = -x^2\sin(y)$.

Nu förväntar man sig att $f_{xy} = f_{yx}$ är en allmän regel, men man måste vara lite försiktig.

Sats:
Antag att $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existerar och är kontinuerliga på en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Då gäller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

i alla $(x,y) \in U$.

Vi kan fortsätter och definiera f_{xxx}, f_{xxy}, $\ldots$ av tredje och högre ordningen. Ovanstående sats generaliseras.

Sats:
Antag att alla partiella derivator upp till ordning n är kontinuerliga på en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Då spelar ordningsföljden av derivatorna ingen roll.

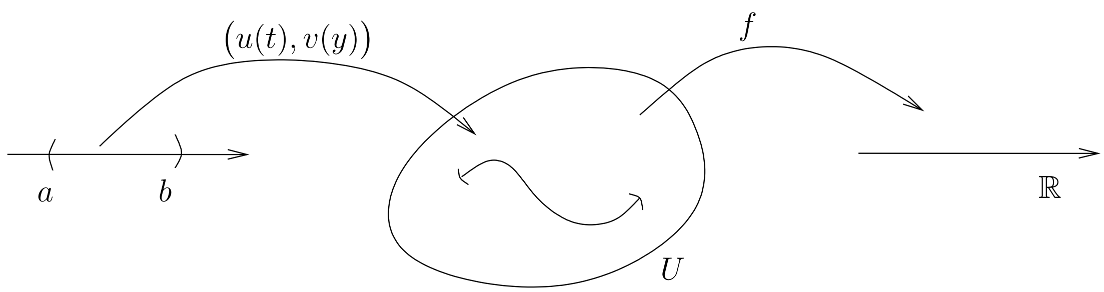
Exempel:

a) För $n = 3$ ger satsen $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$.

b) Ett polynom är en ändlig summa av termer $ax^n y^m$, t.ex. $x^2y^3 - xy + x^2 - 3$. För polynom är alla partiella derivator kontinuerliga på $\mathbb{R}^2$ och satsen gäller.

1.6 Kedjeregeln

Låt $U \subseteq \mathbb{R}^2$ vara öppen, $f : U \to \mathbb{R}$ en funktion med kontinuerliga derivator $f_x,\ f_y$ på U och låt $\big(u(t), v(t)\big)$, $a < t < b$ vara en kurva i U med kontinuerlig hastighetsvektor $\big(u'(t), v'(t)\big)$.



Alltså är $g(t) = f((u(t), v(t))$ en funktion från (a, b) till $\mathbb{R}$.

Kedjeregln: $g(t)$ har en kontinuerlig derivata som beräknas enligt

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t), v(t)\big) \cdot u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t), v(t)\big) \cdot v'(t) \qquad \text{(K)}$$

Vi kallar $\nabla f = (f_x, f_y)$ gradienten av f. $\nabla f = \nabla f(x, y)$ är en funktion som avbildar varje punkt (x, y) på vektorn $\big(f_x(x, y), f_y(x, y)\big)$.

Om $\vec{h}(t) = \big(u'(t), v'(t)\big)$ betecknar hastighetsvektorn, så blir (K)

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f\big(u(t), v(t)\big) = \nabla f\big(u(t), v(t)\big) \cdot \vec{h}(t).$$

Exempel: Vi betraktar $f(x, y) = x^2 y$ och $\big(u(t), v(t)\big) = (t, 2t) = t(1, 2)$. Eftersom $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$ och $\vec{h}(t) = (1, 2)$ får vi

$$\frac{d}{dt} f\big(u(t), v(t)\big) = \nabla f\big(t, 2t\big) \cdot (1, 2) = (4t^2, t^2) \cdot (1, 2) = 6t^2.$$

1.7 Riktningsderivator

Låt $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vara en vektor. Vi vill bestämma tillskottet av $f(x, y)$ om vi löper med konstant hastighet $\vec{v}$ genom en punkt (x_0, y_0). Alltså löper vi längs $(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ och tillskottet är

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\big(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2\big) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (v_1, v_2) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Vi kallar

$$D_{\vec{v}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{v}$$

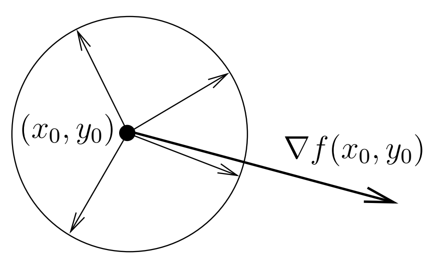
f:s riktningsderivata i punkten (x, y) och riktningen $\vec{v}$.

Exempel: För $f(x, y) = x^2 y$ och riktning $\vec{v} = (1, 2)$ är riktningsderivatan $D_{(1,2)} f(x, y) = (2xy, x^2) \cdot (1, 2) = 2(xy + x^2)$.

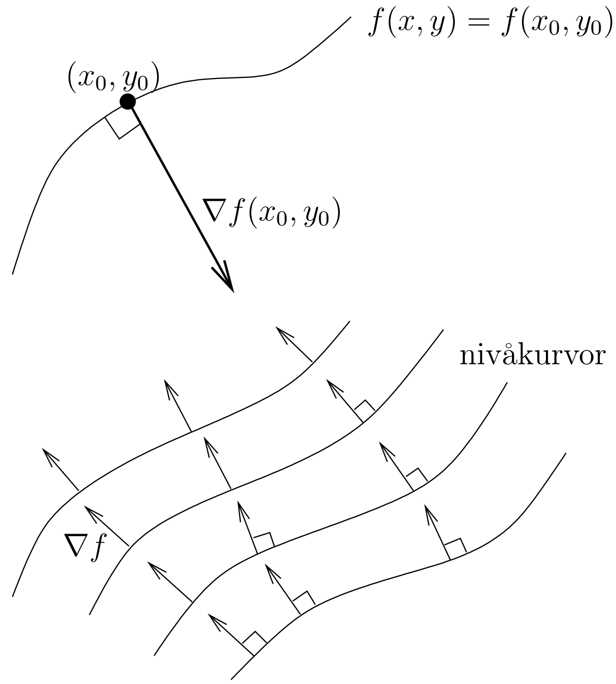
Geometrisk tolkning av ∇f:

Vi antar f, f_x, f_y kontinuerliga och väljer (x_0, y_0) sådan att $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Vi betraktar alla riktningsvektorer $\vec{v}$ med längd 1 (d.v.s $v_1^2 + v_2^2 = 1$).

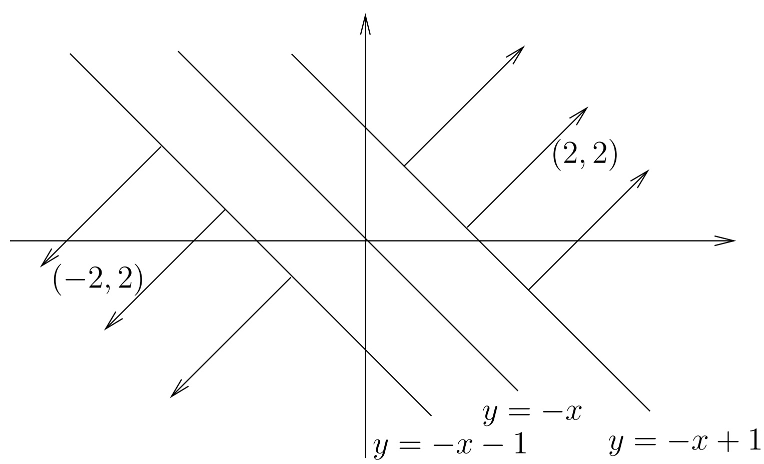
Man kan visa att $\nabla f(x_0, y_0)$ har samma riktning som den enhetsvektor $\vec{v}$ för vilken $D_{\vec{v}}$ blir störst.



Vidare kan man bevisa att nivåkurvan genom (x_0, y_0) är "glatt" och att gradienten är vinkelrät mot nivåkurvan.



Exempel: $f(x,y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $\nabla f(x,y) = 2(x+y, x+y)$.

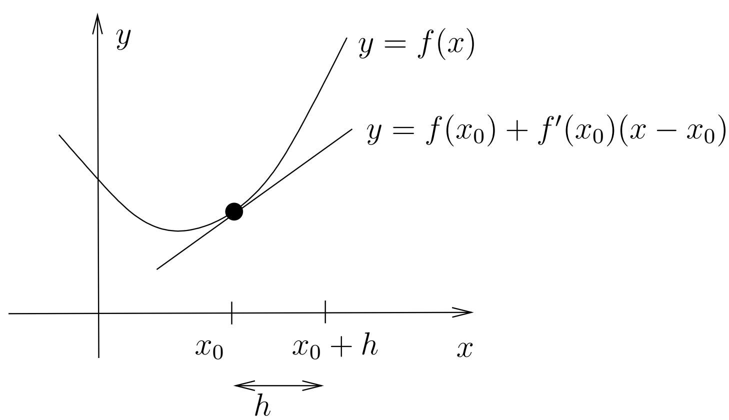


2 Extrema

2.1 Linjär approximation

1 variabel:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t)dt \\ &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f'(x) - f'(x_0)\big)dt \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot h}_{\text{linjär approximation}} \quad + \quad \underbrace{E_1(h)}_{\text{fel}} \end{aligned}$$



Med $x = x_0 + h$ får vi som linjär approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

För felet $E_1(h)$ gäller till och med $E_1(h)/h \longrightarrow 0$ för $h \to 0$. (Det är mer än $E_1(h) \longrightarrow 0$ för $h \to 0$!)

2 variabler:

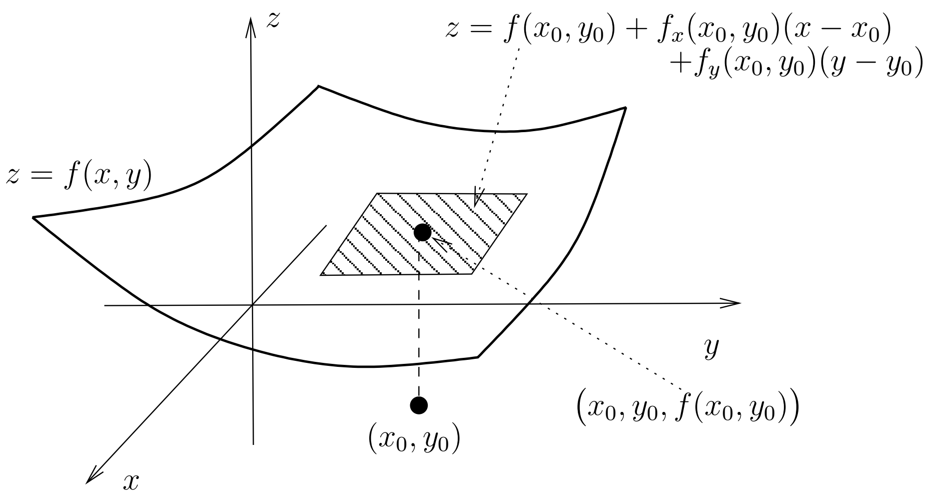
Antag att $f,\ f_x,\ f_y$ är kontinuerliga nära (x_0, y_0).

$$f(x_0+h, y_0+k) = \overbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}^{\text{linjär approximation}} + E_1(h,k)$$

eller

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + E_1(x-x_0, y-y_0)$$

med $x = x_0 + h,\ y = y_0 + k$.



- Grafen av den linjära approximationen är tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$ i punkten (x_0, y_0).
- För felet gäller
$$\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \longrightarrow 0, \qquad h, k \to 0.$$

Lite kortare skrivs den linjära approximationen som

$$f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Exempel: Approximera $f(x,y) = x^2 + y^2$ i $(0,0)$ och $(-1,1)$.

$\nabla f(x,y) = 2(x,y)$. Den linjära approximationen i $(0,0)$ är konstant 0, och i $(-1,1)$ får vi

$$\underbrace{2}_{f(-1,1)} \quad + \quad \underbrace{(-2)}_{f_x(-1,1)}(x-x_0) \quad + \quad \underbrace{2}_{f_y(-1,1)}(y-y_0).$$

2.2 Maxima, minima

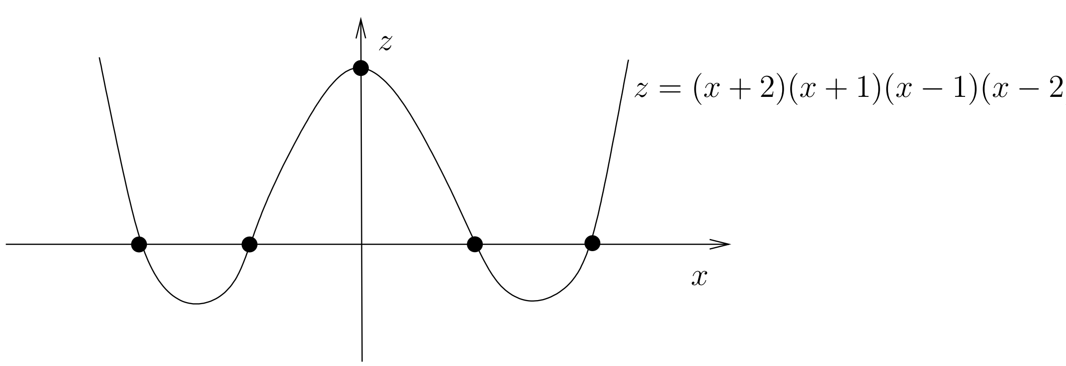
En punkt $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}(f)$ kallas lokalt maximum om det finns ett $\epsilon > 0$ sådant att $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ gäller för alla $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$ som uppfyller $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$.

$(x_0,y_0) \in \mathcal{D}(f)$ är ett globalt maximum om $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ gäller för alla $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$.

Exempel:

a) $f(x,y) = -x^2 - y^2$ har ett globalt maximum i $(0,0)$.

b) $f(x,y) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$ har i $(0,y)$ lokala maxima som inte är globala.



Analogt definierar man minima. Ett extremum är en punkt som är ett maximum eller ett minimum.

Våra resultat om linjär approximation ger ett första kriterium för lokala extrema.

Sats: Antag att f, f_x och f_y är kontinuerliga på en öppen mängd U. Om $(x_0, y_0) \in U$ är ett lokalt extremum så gäller

$$\nabla f(x_0, y_0) = \big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\big) = (0, 0).$$

Satsen hjälper att hitta kandidater för extrema.

Exempel: Var kan $f(x, y)$ ha extrema för

a) $f(x, y) = 3x^2 - xy + 3y^2$.

Eftersom $f_x(x, y) = 6x - y$, $f_y(x, y) = 6y - x$ gäller $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ precis i $(0, 0)$. (Senare: $(0, 0)$ är minimum.)

b) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

$f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = -2y$ och $\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0)$. Men $(0, 0)$ är inte ett lokalt extremum eftersom $f(x, y)$ blir både positiv och negativ nära $(0, 0)$.

En punkt som uppfyller $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ kallas för <u>kritisk punkt</u>. En kritisk punkt som inte är ett lokalt extremum kallas <u>sadelpunkt</u> (t.ex. $(0, 0)$ i föregående exempel).

Sista satsen kan också användas för att utesluta extrema.

Exempel: Har $f(x, y) = e^x + y^2$ lokala extrema?

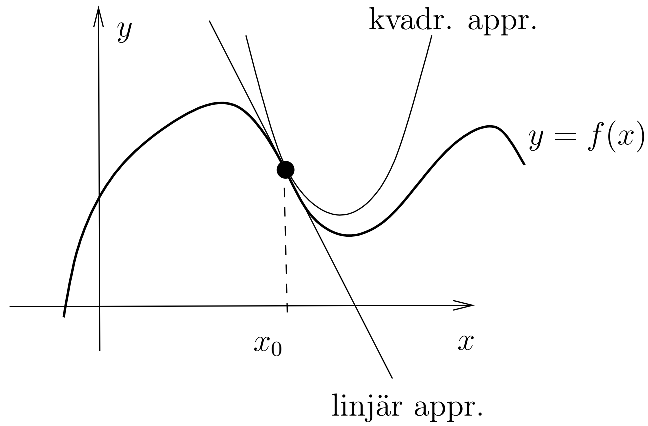
Eftersom $f_x(x, y) = e^x$ aldrig blir noll kommer $\nabla f(x, y)$ inte heller att bli noll. Det visar att f har inga extrema.

2.3 Kvadratisk approximation

1 variabel:

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

om $x \approx x_0$.



2 variabler:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \\ &\quad + E_2(x,y) \end{aligned}$$

Anmärkning: Den kvadratiska approximationen är pålitlig om alla derivator upp till ordning 2 är kontinuerliga nära (x_0, y_0). Då gäller

$$\frac{E_2(x,y)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \longrightarrow 0, \qquad (x,y) \to (x_0,y_0).$$

2.4 Tillräckliga villkor för lokala extrema

Antag

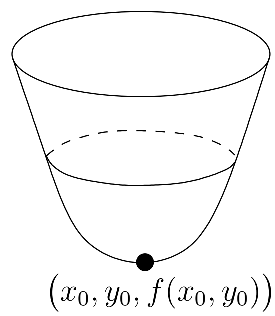
- f, f_x, $\ldots$, f_{yy} kontinuerliga på en öppen $U \subseteq \mathbb{R}^2$.
- I punkten $(x_0, y_0) \in U$ gäller $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ (d.v.s. (x_0, y_0) kritisk punkt av f).

Alltså följer nära (x_0, y_0) att $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + Q(x,y)$ där

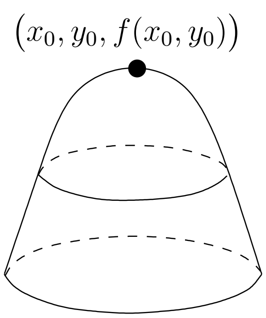
$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{f_{xx}(x_0,y_0)}{2}(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)}{2}(y-y_0)^2. \end{aligned}$$

Vi inför Hessematrisen $H = H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$.

<ins>Fall 1:</ins> $\det(H) > 0$ och $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$
$\Longrightarrow$ (x_0,y_0) lokalt minimum

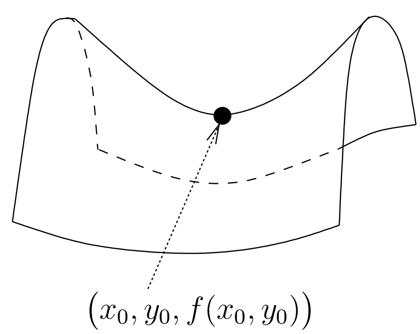


<ins>Fall 2:</ins> $\det(H) > 0$ och $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$
$\Longrightarrow$ (x_0,y_0) lokalt maximum



<ins>Fall 3:</ins> $\det(H) < 0$
$\Longrightarrow$ (x_0,y_0) sadelpunkt

Nära (x_0,y_0) finns både punkter (x,y) med $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ och (x,y) med $f(x,y) > f(x_0,y_0)$.



<ins>Fall 4:</ins> Om $\det(H) = 0$ kan (x_0,y_0) vara ett extremum eller en sadelpunkt

Anmärkning: I fall 1 är (x_0, y_0) till och med ett starkt lokalt minimum, d.v.s. att $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ gäller för alla (x,y) som är tillräckligt nära (x_0,y_0) men skilda från (x_0,y_0).

Analogt för fall 2.

Exempel:

a) $f(x,y) = 3x^2 - 3xy + 3y^2$.

Har redan sett att $(0,0)$ är den enda kritiska punlten. $f_{xx}(x,y) = 6$, $f_{xy}(x,y) = -1$, $f_{yy}(x,y) = 6$

$$\Longrightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \ \det(H) = 35 > 0$$

$$\Longrightarrow (0,0) \text{ lokalt minimum}$$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$. $(0,0)$ kritisk.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \det(H) = -4 < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (0,0) \text{ sadelpunkt}$$

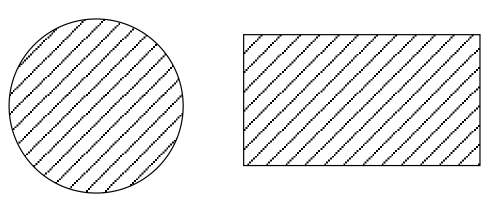
c) $f(x,y) = x^2 + y^4$. $(0,0)$ kritisk och minimum. Men kriteriet kan inte användas eftersom

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \det(H) = 0.$$

d) $f(x,y) = x^2 - y^4$. $(0,0)$ kritisk och sadelpunkt. Kriteriet kan dock inte användas.

2.5 Extrema med bivillkor

Ämne: att hitta extrema på skivor, trianglar,... där vi tillåter punkterna på randen som kandidater.



Teoretiskt resultat: Om en funktion är kontinuerlig på en sådan mängd så existerar ett minimum och ett maximum.

Närmare taget gäller detta resultat för så-kallade kompakta mängder K som uppfyller

a) K ligger i en stor skiva $D_R(0,0)$.

b) Komplementmängden $\mathbb{R}^2 \setminus K$ är öppen.

Exempel: Skivor, trianglar, rektanglar med rand är kompakt. Utan rand blir dessa mängder icke kompakta eftersom komplementmängdan inte är öppen.

Sats: Låt $f(x,y)$ vara kontinuerlig på en kompakt mängd K. Då finns en punkt $(x_{\min}, y_{\min})$ som är ett globalt minimum och en punkt $(x_{\max}, y_{\max})$ som är ett globalt maximum på K.

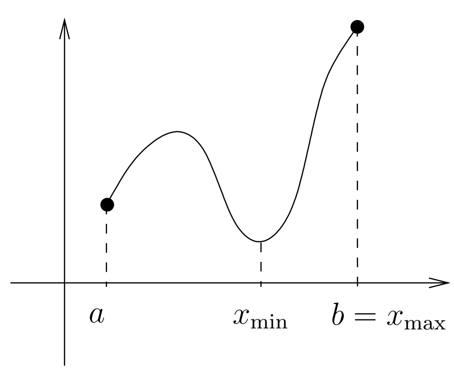
Anmärkning: Det kan finnas flera globala minima resp. maxima, t.ex. om $f(x,y)$ är konstant.

Recept för att lösa maximeringsproblem:

1 variabel: Hitta extrema till $f(x)$ på $[a,b]$.

a) Hitta de kritiska punkterna i det öppna intervallet (a,b), d.v.s. punkter sådana att $f'(x) = 0$.

b) Om steg **a)** har gett en ändlig lista $x_1, \ldots, x_m$ hittar vi extrema genom att jämföra $f(x_1)$, $\ldots$, $f(x_m)$ och $f(a)$, $f(b)$.



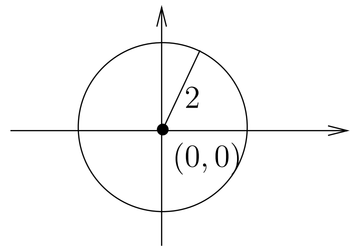
Exempel: Hitta de globala extremana av $f(x) = x^2$, på intervallet $[-1, 2]$.

$x_1 = 0$ är den enda kritiska punkten. Eftersom $f(x_1) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$ är $x_1 = 0$ minimum och $b = 2$, maximum på $[-1, 2]$.

<u>2 variabler:</u>

Problem 1: Hitta extremana till $f(x, y) = xy$ på den slutna skivan $x^2 + y^2 \leq 4$.

Lösning: "frivilligt steg": Rita mängden.



A) Hitta alla kritiska punkter i den öppna skivan $x^2+y^2 < 4$: Eftersom $\nabla f(x, y) = (y, x)$ är $(0, 0)$ den enda kritiska punkten av f. Observera att den ligger i $x^2 + y^2 < 4$.

B) Hitta extrema på randen $x^2 + y^2 = 4$: Randen parametriseras genom

$$t \to 2(\cos(t), \sin(t)), \qquad -\pi \leq t \leq \pi.$$

M.a.p. parametriseringen skrivs f som

$$g(t) = f\big(2\cos(t), \sin(t)\big) = 4\cos(t)\sin(t), \qquad -\pi \leq t \leq \pi.$$

Vi tillämpar 1-variabel-metoden för $g(t)$: $g'(t) = 4(\cos^2(t) - \sin^2(t))$. Eftersom $g'(t) = 0 \iff \cos^2(t) = \sin^2(t) \iff \cos(t) = \pm\sin(t)$, är $t = \pm\frac{3\pi}{4}$ eller $t = \pm\frac{\pi}{4}$ (observera att $-\pi \leq t \leq \pi$!).

Tillsammans ger det som kandidater

$$\begin{array}{rcll} & & f(0,0) = 0 & (\text{i } x^2 + y^2 < 4), \\ g(-3\pi/4) & = & f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2 & \\ g(3\pi/4) & = & f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2 & \\ g(\pi/4) & = & f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2 & \\ g(-\pi/4) & = & f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2 & (\text{i } x^2 + y^2 = 4) \end{array}$$

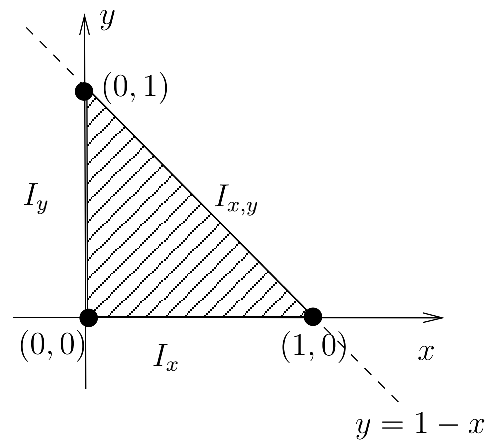
$\Longrightarrow$ globala maxima i $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,
globala minima i $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Problem 2: Hitta extrema för $f(x,y) = xy(1-x-y)$ på triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

Lösning:

Den kompakta triangeln definieras genom

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1-x \end{cases}$$



A) Kritiska punkter i $\quad (\mathrm{I}) \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y < 1-x \end{cases}$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y(1-x-y) - xy = -y^2 + y - 2xy, \\ f_y(x,y) &= x(1-x-y) - xy = -x^2 + x - 2xy. \end{aligned}$$

När gäller $\nabla f(x,y) = (0,0)$ och (I)?

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} y - y^2 = 2xy \\ x - x^2 = 2xy \end{cases}$$

(I) innebär $x > 0$, $y > 0$. Vi får

$$\begin{cases} 1-y = 2x \\ 1-x = 2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

med lösningen $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

B) Rand: $f(x,y) = 0$ på $I_x : y = 0,\ 0 \leq x \leq 1$ och $I_y : x = 0,\ 0 \leq y \leq 1$.

Dessvidare gäller för $y = 1-x$ att $f(x, 1-x) = x(1-x-1+x) = 0$. Alltså är f konstant 0 på hela randen.

$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$. Funktionen har ett maximum i $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ och minima i alla punkter på randen.

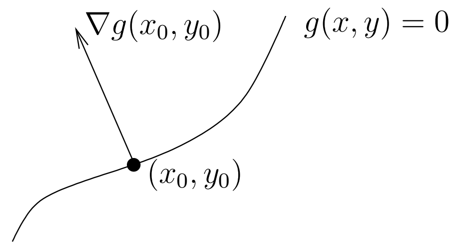
Glatta funktioner:

Låt f vara en funktion på en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Vi säger att f är glatt av ordning n om alla partiella derivator upp till ordning n är kontinuerliga på U. f är glatt om alla derivator är kontinuerliga.

2.6 Lagranges multiplikatormetod

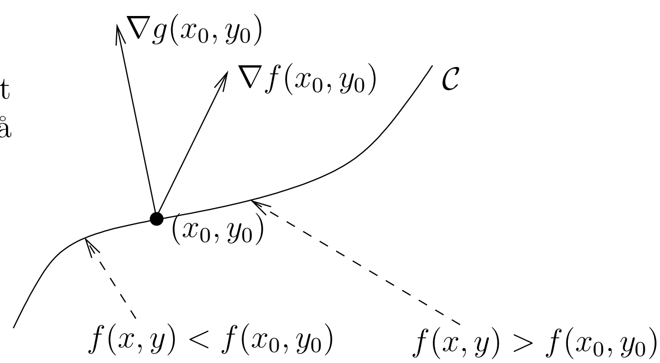
Problem: Hitta extrema till $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$! Vi antar att f och g är glatta av första ordningen.

Nära punkten (x_0, y_0) med $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ är mängden $g(x, y) = 0$ en glatt kurva $\mathcal{C}$.



Om $\nabla f(x_0, y_0)$ och $\nabla g(x_0, y_0)$ inte är kollinjära, gäller $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ på den ena sidan av (x_0, y_0) i $\mathcal{C}$ och $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ på den andra.

(x_0, y_0) kan alltså inte vara ett lokalt extremum av $f(x, y)$ på kurvan.



Resultat: (x_0, y_0) lokalt extremum på kurvan $g(x, y) = 0$
$\implies$ $\nabla f(x_0, y_0)$ och $\nabla g(x_0, y_0)$ kollinjära.

För att hitta alla kandidater måste vi alltså hitta alla punkter på $\mathcal{C}$ där $\nabla f(x_0, y_0)$ och $\nabla g(x_0, y_0)$ är kollinjära, d.v.s att den ena kan skrivas som en multipel av den andra. Lagranges multiplikatormetoden är ett effektivt sätt för att bestämma kandidater.

Sats: Antag att (x_0, y_0) är ett lokalt extremum till vårt problem och att $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Då finns ett tal λ_0 sådant att (x_0, y_0, λ_0) är en kritisk punkt av Lagrangefunktionen

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Bevis: Observera först

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (f_x + \lambda g_x, f_y + \lambda g_y, g).$$

Om (x_0, y_0) är ett lokalt extremum är $\nabla g(x_0, y_0)$ och $\nabla f(x_0, y_0)$ kollinjära. Eftersom $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ kan $\nabla f(x_0, y_0)$ skrivas som en multipel av $\nabla g(x_0, y_0)$, d.v.s. det finns λ_0 sådant att $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.

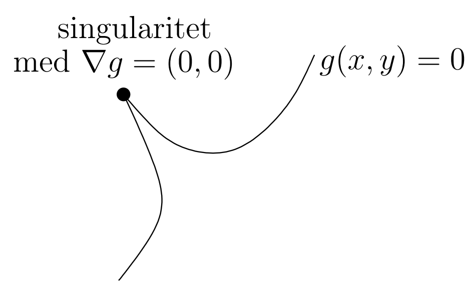
Tillsammans med bivillkoret som ger $g(x_0, y_0) = 0$ följer att $\nabla L(x_0, y_0, -\lambda_0) = 0$.

Recept:

a) Hitta alla kritiska punkter av $L(x, y, \lambda)$.

b) Om vi får en ändlig lista $(x_1, y_1, \lambda_1), \ldots, (x_m, y_m, \lambda_m)$,
jämför $f(x_1, y_1), \ldots, f(x_m, y_m)$.

Anmärkning: Metoden blir ofullständig om det finns punkter (x, y) med $g(x, y) = 0$ och $\nabla g(x, y) = 0$. I detta fall måste man också jämföra $f(x_1, y_1), \ldots, f(x_m, y_m)$ med $f(x, y)$ i alla sådana punkter!



Exempel: Hitta extrema till $f(x,y) = xy$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = 4$.

Eftersom $x^2 + y^2 = 4 \iff x^2 + y^2 - 4 = 0$ sätter vi $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Alltså är $L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ med $\nabla L(x,y,\lambda) = (y + 2\lambda x, x + 2\lambda y, x^2 + y^2 - 4)$.

$$\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0) \quad \iff \quad \begin{cases} y = -2\lambda x & (1) \\ x = -2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 = 4 & (3) \end{cases}$$

(3) $\Longrightarrow (x,y) \neq (0,0)$. (1),(2) $\Longrightarrow x \neq 0$ och $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} \overset{(1)}{=} -2\lambda \overset{(2)}{=} \frac{x}{y} &\Longrightarrow -2\lambda = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow x = \pm y \\ &\overset{(3)}{\Longrightarrow} 2x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Kritiska punkter av L är alltså

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}), \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}), \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}).$$

Jämförelsen ger $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2$, som är maxima, och $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2$. som är minima.

Det återstår att anmärka att $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ gäller om $g(x,y) = (0,0)$ vilket är lätt att se (ty $x^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow (x,y,) \neq (0,0) \Longrightarrow \nabla g(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$).

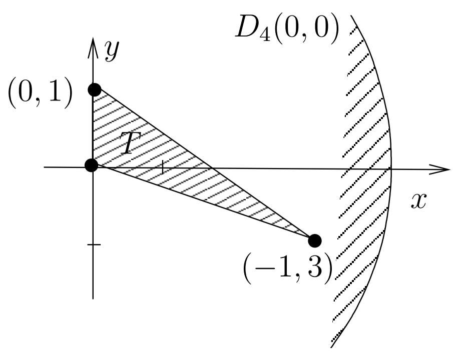
Kompletteringar om kompakta mängder

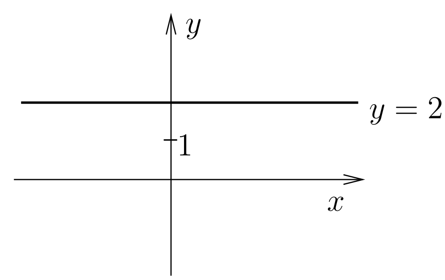
En mängd $L \subset \mathbb{R}^2$ är begränsad om det finns ett tal $R > 0$ sådant att $L \subset D_R(0)$ där $D_R(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < R\}$ är skivan med radie R och centrum i origo.

Exempel:

a) Triangeln T med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,3)$ är begränsad, eftersom den ligger i $D_4(0,0)$.

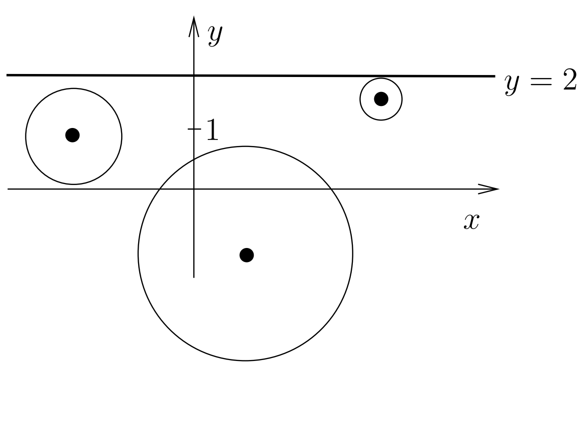
b) Linjen $y = 2$ är inte begränsad.





En mängd $L \subset \mathbb{R}^2$ är sluten om komplementet $\mathbb{R}^2 \backslash L$ är öppen.

Exempel: T (triangeln med rand!) och $y = 2$ är slutna.



En punkt $(x_0, y_0) \in L$ kallas inre punkt i L om L innehåller en skiva med centrum i (x_0, y_0). En punkt i L som inte är inre punkt kallas randpunkt.

Vi betecknar

- $\text{int}L$ = mängden av alla inre punkter,
- ∂L = mängden av alla randpunkter.

Exempel:

a) ∂T är föreningen av de tre sträckorna mellan hörnen.

b) För L given genom $y = 2$ gäller $L = \partial L$
(inga inre punkter).

En mängd L är kompakt om L är begränsad och sluten.

Exempel: T kompakt, $y = 2$ ej kompakt, $\overline{D_2(0,0)}$ kompakt, $D_2(0,0)$ ej kompakt (inte sluten).

Det viktigaste resultatet i detta avsnitt är

Sats: Låt $f(x, y)$ vara kontinuerlig på en kompakt mängd L. Då finns ett globalt minimum $(x_{\text{min}}, y_{\text{min}}) \in L$ och ett globalt maximum $(x_{\text{max}}, y_{\text{max}}) \in L$

Anmärkning:

a) Förutsättningen att L är kompakt är nödvändig.

T.ex. betraktar vi funktionen $f(x, y) = x$ på skivan $D_1(0,0)$. $f(x, y)$ har ingen maximum i $D_1(0,0)$ ($f(x, y) < 1$ men godtycklig nära 1).

Däremot har $f(x, y)$ ett globalt maximum på $\overline{D_1(0,0)}$ nämligen $(1,0)$.

b) Satsen påstår inte att f:s extrema är unika.

T.ex. är för en konstant funktion varje punkt både maximum och minimum.

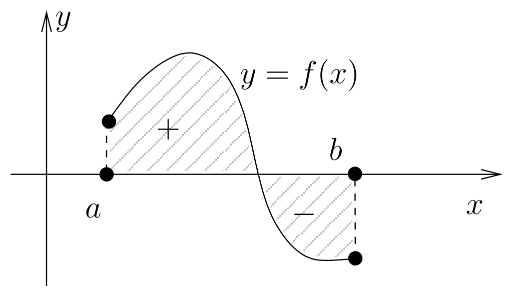
3 Dubbel- och trippelintegraler

Inledning:

en variabel:

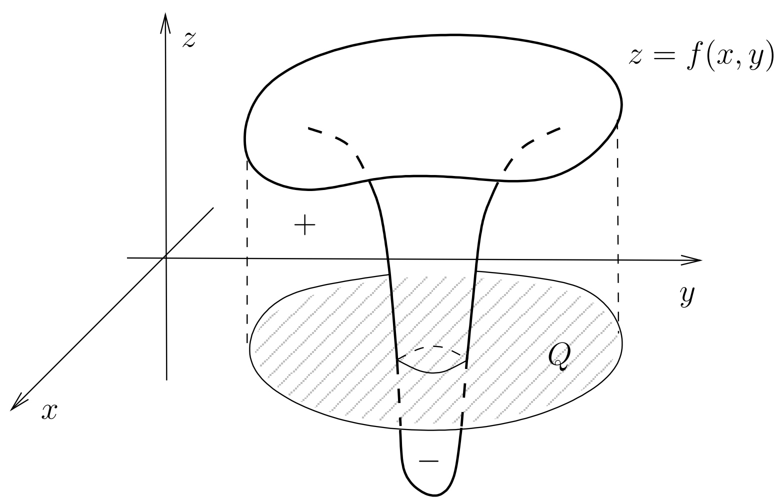
$$\int_a^b f(x)dx = \text{arean mellan } f\text{:s graf och } x\text{-axeln}$$

(delen under x-axeln räknas negativt).



två variabler:

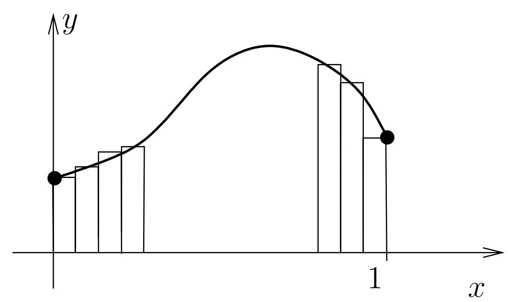
$$\iint_Q f(x,y)dA = \text{volymen mellan } f\text{:s graf och } (x,y)\text{-planet}$$



Approximation (idé):

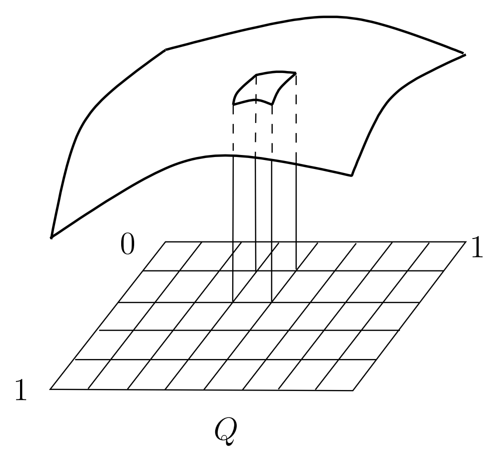
en variabel:

Approximera $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ genom integralen av en funktion som är styckvis konstant på små delintervall.



två variabler:

Dela upp Q i små rektanglar och approximera $f(x,y)$ genom en funktion som är konstant på rektanglarna.



Efter mycket arbete leder denna idé till en rigorös definition av integralen som inte beror på åskådningen.

Allmänna räknelager:

Vi ska alltid betrakta kontinuerliga funktioner och enkla integrationsmängder!

Sats:

a) $\displaystyle\iint\limits_Q kf(x,y)dA = k\iint\limits_Q f(x,y)dA, \qquad k$ konstant,

b) $\displaystyle\iint\limits_Q \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dA = \iint\limits_Q f(x,y)dA + \iint\limits_Q g(x,y)dA$

(additivitet),

c) Förening av integrationsområden: Antag att $Q_1 \cap Q_2$ har area 0.

Då gäller $\displaystyle\iint\limits_{Q_1\cup Q_2} f(x,y)dA = \iint\limits_{Q_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{Q_2} f(x,y)dA,$

d) $\displaystyle\iint\limits_Q dA = \text{area}(Q).$

Tillämpning: Dubbelintegraler kan man ibland bestämma med enkla geometriska argument.

a) $\displaystyle\iint\limits_Q 3\,dA = 3\iint\limits_Q dA = 3\,\text{area}(Q).$

b) För Q: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

$$\iint\limits_Q xdA = \iint\limits_{Q_1} xdA + \iint\limits_{Q_2} xdA = 0$$

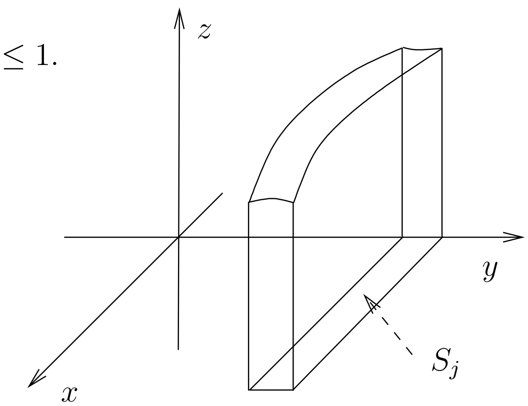
där $Q_1 : -1 \le x \le 0,\ -1 \le y \le 1,$

$Q_2 : \quad 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1.$

P.g.a. symmetri har integralerna över Q_1 och Q_2 samma belopp och motsatt tecken.

c) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \big(\sin(x)+y^3+4\big)dA = \underbrace{\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \sin(x)\,dA}_{=0} + \underbrace{\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} y^3 dA}_{=0} + 4\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dA = 4\pi.$

3.1 Beräkning av dubbelintegraler



Låt $f(x, y)$ vara kontinuerlig på $Q: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

- Skär Q i strimlor av bredd $\dfrac{1}{n}$,
- Approximera $\displaystyle\iint_{S_j} f(x,y)dA$ genom $\displaystyle\frac{1}{n}\int_0^1 f\Big(x, \frac{j}{n}\Big)dx$.

Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_Q f(x,y)dA &= \iint_{S_1} f(x,y)dA + \ldots + \iint_{S_n} f(x,y)dA \\
&\approx \frac{1}{n}\left(\int_0^1 f\Big(x, \frac{1}{n}\Big)dx + \ldots + \int_0^1 f(x,1)dx\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(F\Big(\frac{1}{n}\Big) + F\Big(\frac{2}{n}\Big) + \ldots + F(1)\right)
\end{aligned}$$

med $F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$.

$$\underbrace{\frac{1}{n}\left(F\Big(\frac{1}{n}\Big) + F\Big(\frac{2}{n}\Big) + \ldots + F(1)\right)}_{\longrightarrow \int_0^1 F(y)dy \quad (n \to \infty)} \text{ är en Riemannsumma för } F(y)$$

Man kan bevisa att Riemannsumman också går mot $\displaystyle\iint_Q f(x,y)dA$ om $n \to \infty$.

Alltså får vi

$$\iint_Q f(x,y)dA = \int_0^1 F(y)dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy,$$

och analogt

$$\iint_Q f(x,y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx.$$

Vi skriver också

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = \iint\limits_Q f(x,y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx.$$

Exempel: Beräkna $\displaystyle\iint\limits_Q (4-x-3y)dA$ med Q som ovan.

Integrerar man först m.a.p. x får man

$$F(y) = \int_0^1 (4-x-3y)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - 3yx \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{2} - 3y$$

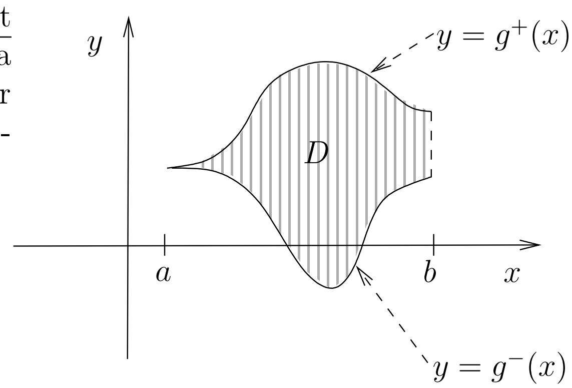
och sen $\displaystyle\iint\limits_Q (4-x-3y)dA = \int_0^1 F(y)dy = \int_0^1 \left(\frac{7}{2} - 3y\right)dy = 2.$

Om man beräknar integralen i omvänd ordningsföljd får man enligt satsen samma resultat. Vi kollar:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (4-x-3y)dy &= \left[4y - xy - 3\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{2} - x \\ &\Longrightarrow \iint\limits_Q (4-x-3y)dA = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x\right)dx = 2. \end{aligned}$$

3.2 Integration över enkla områden

Ett onråde D sägs vara <u>y-enkelt</u> om D är instängt mellan <u>graferna</u> av två kontinuerliga funktioner som är definierade på samma intervall.



Närmare bestämt antar vi $g^-(x) \leq g^+(x)$ för $a \leq x \leq b$
och sätter

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g^-(x) \leq y \leq g^+(x)\}.$$

På D blir integralen av en kontinuerlig funktion

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b dx \int_{g^-(x)}^{g^+(x)} f(x,y)dy.$$

Exempel: Integrera funktionen $f(x,y) = xy$ över triangeln T med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

T är y-enkelt med $g^-(x) = 0$, $g^+(x) = x$. Alltså får vi

$$\begin{aligned}\iint_T xy\,dA &= \int_0^1 dx \int_0^x xy\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y\,dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Analogt är <u>x-enkla</u> områden områden av formen

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, h^-(y) \leq x \leq h^+(y)\}$$

och integralen över D beräknas enligt

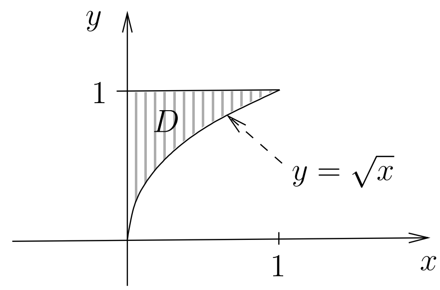
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b dy \int_{h^-(y)}^{h^+(y)} f(x,y)dx.$$

Ibland spelar ordningsföljden en stor roll:

Exempel: Beräkna $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \exp(y^3)\, dy.$

Området är $D : 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x} \leq y \leq 1$. Observera att D också är x-enkelt, givet genom $0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y^2$.

$$\begin{aligned}
\implies \quad \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \exp(y^3)\, dy &= \int_0^1 dy \int_0^{x^2} \exp(y^3)\, dx \\
&= \int_0^1 \Big[x \exp(y^3)\Big]_{x=0}^{x=y^2} dy \\
&= \int_0^1 y^2 \exp(y^3)\, dy \\
&\overset{\substack{u = y^3 \\ du = 3y^2\, dy}}{=} \frac{1}{3} \int_0^1 \exp(u)\, du \\
&= \frac{1}{3} \Big[\exp(u)\Big]_{u=1}^{u=0} \\
&= \frac{1}{3}(e-1).
\end{aligned}$$

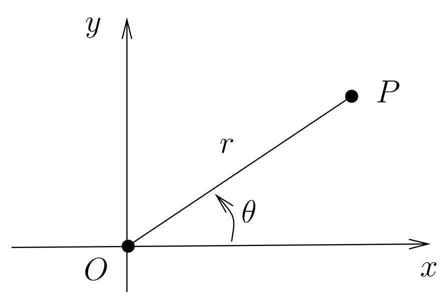


3.3 Polära koordinater

Vanligt beskriver vi läget av en punlt P i planet m.h.a. dess (x, y)-koordinater. Alternativt är P bestämd om vi känner

$r =$ avståndet av P från origo O,

$\theta =$ vinkeln mellan x-axeln och sträckan OP (räknad moturs).



$[r, \theta]$ kallas för polära koordinater för P. Normaltvis tillåter vi $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Anmärkning:

a) För varje θ beskriver $[0, \theta]$ origo.

b) För varje heltal k beskriver $[r, \theta]$ och $[r, \theta + 2\pi k]$ samma punkt i planet.

c) Punkter skilda från origo kan beskrivas på ett unikt sätt med $r > 0$ och $0 \leq \theta < 2\pi$.

Samband mellan rätvinkliga och polära koordinater

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \text{ om } x \neq 0$$

$$\cot(\theta) = \frac{x}{y} \text{ om } x \neq 0$$

Anmärkning: Ibland är det praktiskt att räkna med $r < 0$, där $[r, \theta]$ är samma punkt som $[-r, \theta + \pi]$.

Mängder i polära koordinater:

a) Cirkeln med centrum i origo och radie R:

i (x, y)-koordinater: $x^2 + y^2 = R^2$,

i $[r, \theta]$-koordinater: $r = R$.

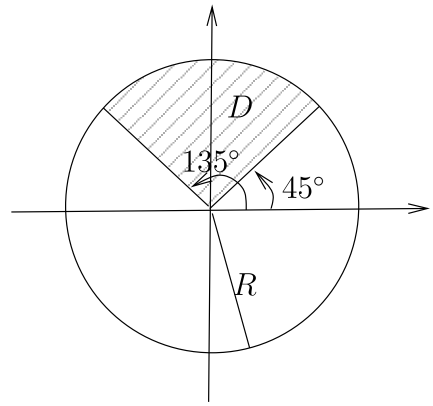
b) Vad är $r = 2a\cos(\theta)$?

$$\begin{aligned} r = 2a\cos(\theta) \quad &\Longleftrightarrow \quad r^2 = 2ar\cos(\theta) \\ &\overset{\substack{r^2 = x^2+y^2 \\ r\cos(\theta) = x}}{\Longleftrightarrow} \quad 0 = x^2 - 2ax + y^2 = (x-2)^2 + y^2 - a \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 = a^2, \end{aligned}$$

d.v.s. cirkeln med centrum i $(a, 0)$ och radie $\sqrt{a^2} = |a|$.

c) Skivan med radie R och centrum i origo: $r < R$ (öppen skiva), $r \leq R$ (sluten skiva).

d) $D : r \leq R$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$:



Funktioner i polära koordinater: Använd $(x, y) = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$. T.ex. blir $f(x, y) = xy$

$$f[r, \theta] = r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{r^2}{2} \sin(2\theta).$$

Integration i polära koordinater:

Problem: Visa m.h.a. integration att enhetsskivan D har area π!

1:a försöket: $D : x^2 + y^2 \leq 1$ är x-enkelt,

$$-1 \leq x \leq 1, \qquad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Alltså är

$$\text{area}(D) = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx,$$

vilket kan beräknas med substitutionen $x = \sin(\alpha)$, men det blir mycket enklare i polära koordinater!

2:a försöket: $D : r \leq 1$.

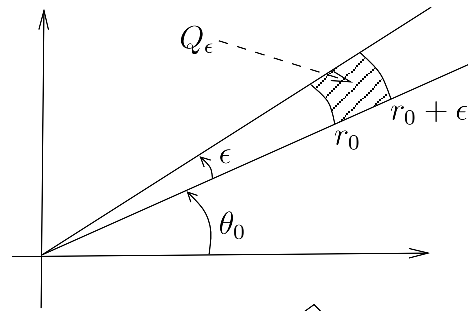
$$\text{area}(D) = \iint_{r \leq 1} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \textbf{?}\ d\theta\, dr$$

Observera att **?** inte kan vara 1!

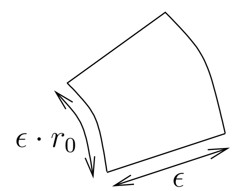
Hur översätter man $dx\,dy$ till polära koordinater?

Först mäter vi arean till ett litet område

$Q_\epsilon : r_0 \le r \le r_0 + \epsilon,$
$\qquad \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + \epsilon.$



$$\text{area}(Q_\epsilon) \approx (\epsilon \cdot r_0) \cdot \epsilon = r_0 \epsilon^2$$



Det approximativa resultatet erhålles om man integrerar $r_0\, d\theta dr$ över Q_ϵ. Alltså är det förnunftigt att sätta

$$\boxed{dx\,dy = r\,d\theta\,dr}.$$

Vi erhåller för enhetsskivan D

$$\text{area} = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\,d\theta = 2\pi \int_0^1 r\,dr = \pi.$$

Den exakta arean till Q_ϵ är

$$\begin{aligned}
\text{area}(Q_\epsilon) &= \int_{r_0}^{r_0+\epsilon} dr \int_{\theta_0}^{\theta_0+\epsilon} r\,d\theta = \epsilon \int_{r_0}^{r_0+\epsilon} r\,dr = \epsilon \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=r_0}^{r=r_0+\epsilon} \\
&= \frac{\epsilon}{2}\big(r_0^2 + 2r_0\epsilon + \epsilon^2 - r_0^2\big) = r_0\epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{2}.
\end{aligned}$$

Problem: Bestäm volymen V som i första oktanten av $\mathbb{R}^3$ blir instängd mellan (x, y)-planet, cylindern $x^2 + y^2 = a^2$ och grafen av $f(x, y) = y$.

Lösning: Integrera y över $D : x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$.
I polära koordinater gäller

$$D : \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

och med $f[r, \theta] = y = r \sin(\theta)$ får vi

$$\iint\limits_D y \, dA = \int_0^a r^2 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \, d\theta = \frac{a^3}{3}.$$

Problem: Bestäm $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Lösning:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = 2\pi \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=R} = \pi \lim_{R\to\infty} \left(1 - e^{-R^2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Alltså får vi $I = \sqrt{\pi}$ $\quad$ (I måste vara > 0!)

3.4 Variabelbyte i dubbelintegraler

För variabelbytet

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned} \qquad (\star)$$

antar vi att

a) $x(u, v)$, $y(u, v)$ är glatta av första ordningen på en öppen mängd $U \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$,

b) $\big(x(u, v), y(u, v)\big)$ definierar en bijektiv avbildning av U på en öppen $V \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$.

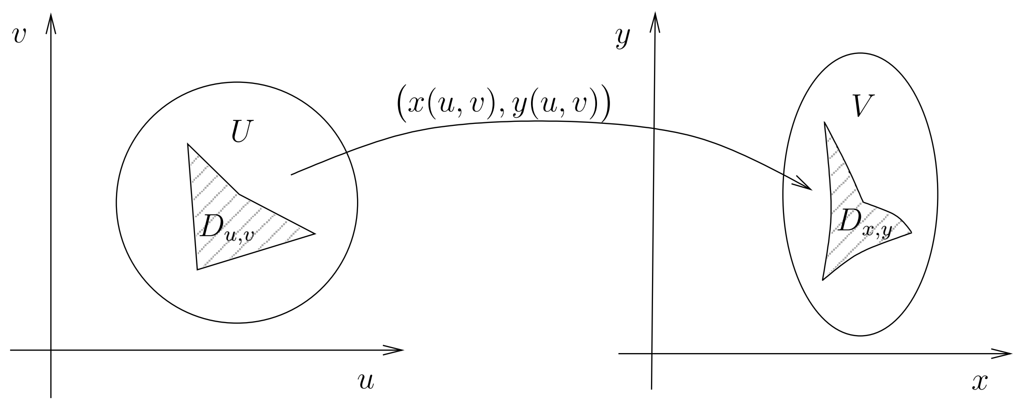
Låt $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ vara Jacobideterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = x_u y_v - x_v y_u.$$

Då gäller för ett integrationsområde $D_{u,v} \subset U$

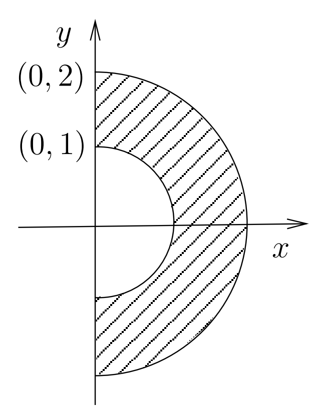
$$\iint\limits_{D_{x,y}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{u,v}} f\Big(x(u,v), y(u,v)\Big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

där $D_{x,y}$ är området som motsvarar $D_{u,v}$ m.a.p. avbildningen $(u,v) \longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big)$.



Exempel:

a) Beräkna $I = \displaystyle\iint\limits_{\substack{1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x \ge 0}} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}.$



Observera $\begin{cases} 1 \le x^2+y^2 \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

och för variabelbytet $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$, $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$ får vi

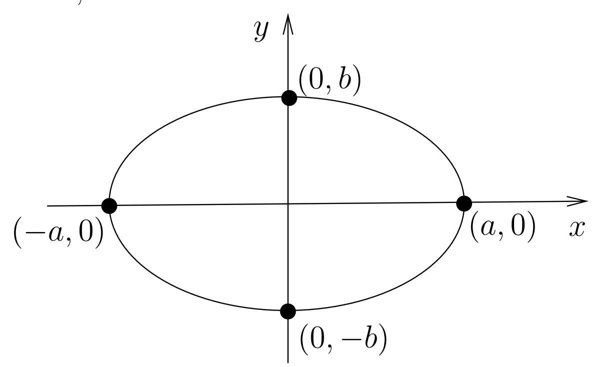
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = r$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \frac{r}{r^2} dr = \pi \ln(2).$$

b) Beräkna arean av ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ med $a, b > 0$.

Sätt $x = au$, $y = bv$ så att

$$1 \geq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2 + v^2.$$



Vi får då

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab \\ \Longrightarrow \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} dx\,dy &= \iint\limits_{u^2+v^2\leq 1} ab\,du\,dv = ab\pi. \end{aligned}$$

3.5 Trippelintegraler

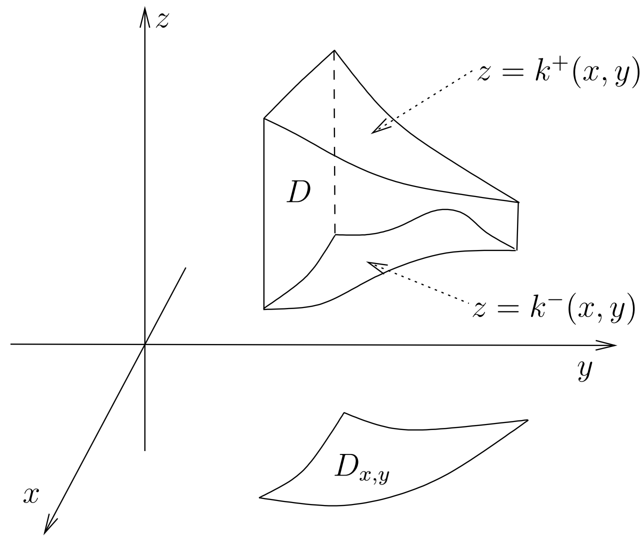
Igen integrerar vi över enkla områden. T.ex. kan det vara mängden D av alla punkter (x, y, z) som uppfyller

1. (x, y) ligger i ett y-enkelt onråde $D_{x,y}$ i (x, y)-planet,
2. $k^-(x, y) \leq z \leq k^+(x, y)$

där $k^-(x, y) \leq k^+(x, y)$ är kontinuerliga funktioner på $D_{x,y}$.

$D_{x,y}$ kan beskrivas som

$a \leq x \leq b$
$g^{-}(x) \leq y \leq g^{+}(y)$



Totalt definieras D genom

$a \leq x \leq b$
$g^{-}(x) \leq y \leq g^{+}(y)$
$k^{-}(x, y) \leq z \leq k^{+}(x, y)$

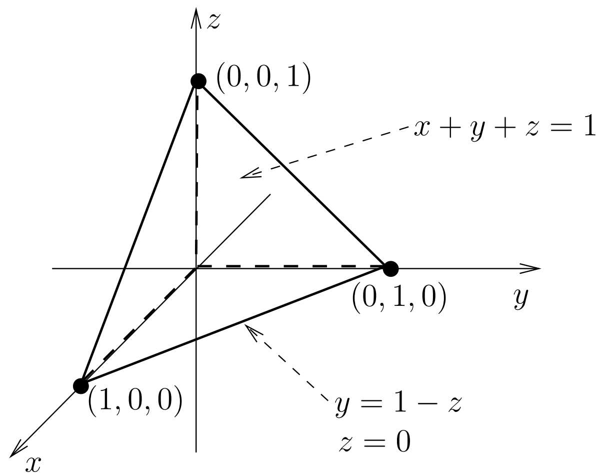
Trippelintegralen över D beräknas enligt

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D f(x,y,z)dV &= \int_a^b \left(\int_{g^-(x)}^{g^+(x)} \left(\int_{k^-(x,y)}^{k^+(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_a^b dx \int_{g^-(x)}^{g^+(x)} dy \int_{k^-(x,y)}^{k^+(x,y)} f(x,y,z)\,dz.\end{aligned}$$

Anmärkning: Vi har 6 olika ordningsföljder för x, y, z.

Exempel: Bestäm volymen till tetraedern T med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$!

$$T: 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x, \quad 0 \le z \le 1-x-y.$$



$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \mathrm{vol}(T) &= \iiint_T dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy \\
&= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x)^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

3.6 Variabelbyte i trippelintegraler

För variabeltransformationen

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w) \\ y &= y(u,v,w) \\ z &= z(u,v,w) \end{aligned}$$

antar vi liknande förutsättningar som i avsnitt 3.4.
Jacobideterminanten låter

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

och vi får transformationsformeln

$$\iiint\limits_{D_{x,y,z}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{u,v,w}} f\Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\Big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

Cylinderkoordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned}$$

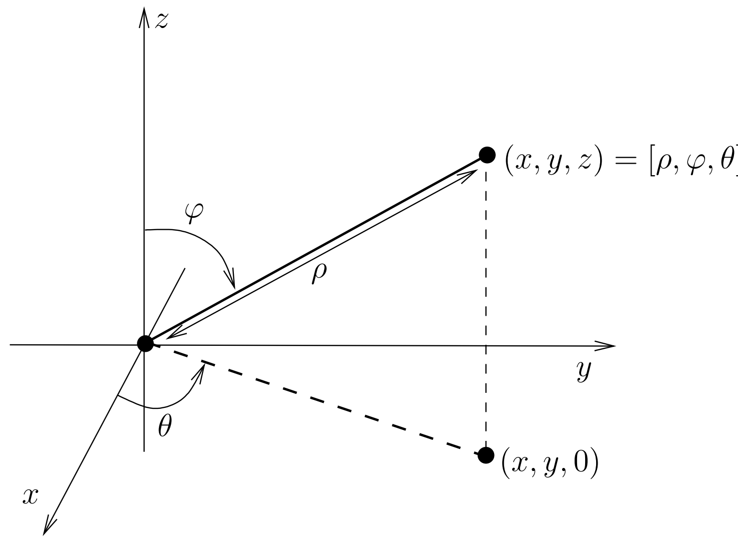
Vi skriver $[r,\theta,z]$.

Eftersom $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$ får vi $\boxed{dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz}$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y &= \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z &= \rho\cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$(\rho \geq 0)$$



Varje punkt kan skrivas på många olika sätt. Ofta inskränker man ρ, φ, θ genom

$$0 < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

I detta fall beskriver $[\rho, 0, \theta] = (0, 0, \rho)$ (alla θ) och $[\rho, \pi, \theta] = (0, 0, -\rho)$ (alla θ) punkter på z-axeln på flera olika sätt. Annars blir $[\rho, \varphi, \theta]$ entydigt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} &= \det\begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \rho^2 \ \det\begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \rho^2 \left(\cos(\varphi) \ \det\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \right. \\
&\qquad \left. + \sin(\varphi) \ \det\begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho^2 \left(\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) \ \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \sin^3(\varphi) \ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right) \\
&= \rho^2 \sin(\varphi)\big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big) \\
&= \rho^2 \sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad \boxed{dx\,dy\,dz = \rho^2 |\sin(\varphi)|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta}
$$

Anmärkning: För $0 \leq \varphi \leq \pi$ gäller $|\sin(\varphi)| = \sin(\varphi)$.

Exempel: Låt H vara den över hälften av klotet med centrum i origo och radie $a > 0$. Lå masstätheten vara $2a - \rho$. Bestäm H:s totala massa!

H beskrivs genom $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$ eller i polära koordinater

$$
0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.
$$

Alltså är volymen

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_H (2a - \rho) dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^a (2a - \rho)\rho^2 \ d\rho \\
&= 2\pi \Big[2a\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \Big]_{\rho=0}^{\rho=a} \\
&= \frac{5\pi}{6} a^4
\end{aligned}
$$

4 Vektorfält

Vi skriver vektorer i $\mathbb{R}^2$ som par (x, y) eller också som $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ där $\vec{\imath} = (1, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1)$.

Analogt skriver vi vektorer i $\mathbb{R}^3$ som trippel (x, y, z) eller $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ där $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

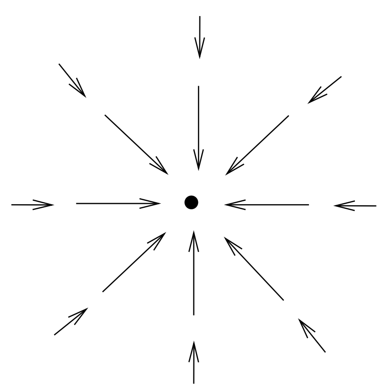
Definition: Ett vektorfält $\vec{F}$ är en avbildning som till varje punkt $(x, y) \in \mathcal{D}(\vec{F})$ ordnar en vektor $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{\imath} + F_2(x, y)\vec{\jmath}$.

Exempel:

a) Gravitationsfältet till en potential med massa m i punkten $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ (med k betecknas gravitationskonstanten)

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= -\frac{km}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ &= -\frac{km}{\Big((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}\Big((x - x_0)\vec{\imath} + (y - y_0)\vec{\jmath} + (z - z_0)\vec{k}\Big) \end{aligned}$$

$\vec{F}(\vec{r})$ har längd $\dfrac{km}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} = |\vec{F}(\vec{r})|$



b) Låt $f(x, y, z)$ vara en funktion. Gradienten

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{\imath} + f_y(x, y, z)\vec{\jmath} + f_z(x, y, z)\vec{k}$$

är ett vektorfält.

4.1 Fältlinjer

Vi vill bestämma kurvor som i varje punkt tangerar fältet $\vec{F} = F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath}$.

En sådan kurva $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ uppfyller

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \lambda(t)\vec{F}(t) \qquad (\star)$$

med en funktion $\lambda(t)$. Observera att $(\star)$ är ekvivalent med $\dfrac{dx}{dt} = \lambda F_1$, $\dfrac{dy}{dt} = \lambda F_2$. Om $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$, får vi alltså

$$\frac{dx}{F_1} = \lambda dt = \frac{dy}{F_2}. \qquad (\star\star)$$

Nu är strategin att multiplicera $(\star\star)$ med en lämplig funktion $f \neq 0$ sådan att $P = f/F_1$ bara beror på x och $Q = f/F_2$ bara beror på y. Genom integration får vi sedan

$$\int P(x)\,dx = \int Q(y)\,dy$$

som en ekvation för fältlinjerna.

Exempel: Vi betraktar rotationsfältet i planet

$$\vec{V} = \Omega\Big(\underbrace{-y}_{F_1}\,\vec{\imath} + \underbrace{x}_{F_2}\,\vec{\jmath}\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{F_1} = -\frac{dx}{y}, \quad \frac{dy}{F_2} = \frac{dy}{x}$$

Multiplikation med xy ger $-x\,dx = y\,dy$. Integration: $-2x^2 = 2y^2 + C'$ eller $x^2 + y^2 = C$. Fältlinjerna är alltså cirkler med centrum i origo.

4.2 Konservativa vektorfält

Från och med nu ska alla vektorfält vara glatta, d.v.s. med glatta funktioner F_1, F_2 (och F_3).

En funktion φ är en <u>potential till $\vec{F}$</u> om $\nabla\varphi = \vec{F}$. Ett vektorfält (definierat på en öppen mängd $\mathcal{D}(\vec{F})$)) är <u>konservativt</u> om $\vec{F}$ har en potential φ definierad på hela mängden $\mathcal{D}(\vec{F})$.

Exempel: $\vec{F}$ konservativt $\Longleftrightarrow$ $\vec{F}$ gradientfält

Problem: Avgör om $\vec{F}$ kan ha en potential och bestäm den!

<u>Nödvändigt villkor:</u> Låt $\vec{F} = \nabla\varphi$, d.v.s. $\varphi_x = F_1$, $\varphi_y = F_2$. Då gäller

$$F_{1,y} = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = F_{2,x}. \qquad (+)$$

<u>Omvänt:</u> $F_{1,y} \neq F_{2,x} \Longrightarrow \quad \vec{F}$. <u>inte</u> konservativt.

I dimension 3 får vi istället för (+)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Exempel: $\vec{V}(x, y, z) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$. Eftersom $\dfrac{\partial V_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \dfrac{\partial V_2}{\partial x}$ är $\vec{V}$ inte konservativt.

Observera: På några mängder, t.ex. $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ finns icke-konservativa fält som uppfyller (+)! Senare mer därom!

$$\boxed{\vec{F} \text{ konservativt}} \quad \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow \end{matrix} \quad \boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}}$$

Utan bevis: "$\Longleftarrow$" gäller på skivor, $\mathbb{R}^2$, klot, $\mathbb{R}^3$!

4.3 Linjeintegraler av vektorfält

Låt $\mathcal{C} : \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$ (med $a \le t \le b$) vara en glatt kurva och $\vec{F}(x, y)$ ett glatt vektorfält. Vi definierar linjeintegralen av $\vec{F}$ längs $\mathcal{C}$ som

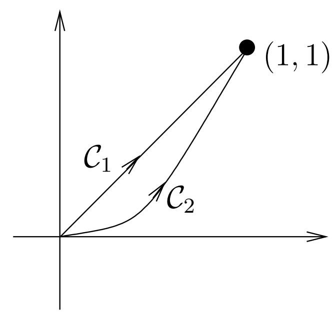
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad &= \quad \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}_{\text{hastighetsvektorn}} \, dt \\ &= \quad \int_a^b \Big(F_1\big(x(t), y(t)\big) \frac{dx}{dt}(t) + F_2\big(x(t), y(t)\big) \frac{dy}{dt}(t) \Big) \, dt.\end{aligned}$$

Observera att $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)$ är hastighetsvektorn. Vi skriver också

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1 \, dx + F_2 \, dy$$

Exempel: Låt $\vec{F} = y^2\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$.

Vi betraktar kurvorna $\mathcal{C}_1 : \vec{r}_1(t) = (t, t)$ och $\mathcal{C}_2 : \vec{r}_2(t) = (t, t^2)$ för $0 \le t \le 1$.



$\underline{\mathcal{C}_1}$: $\quad \vec{F}\big(\vec{r}_1(t)\big) = (t^2, 2t^2), \; \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} = (1, 1) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}\big(\vec{r}_1(t)\big) \cdot \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} = t^2 + 2t^2 = 3t^2$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 3t^2 \, dt = \Big[t^3 \Big]_{t=0}^{t=1} = 1$$

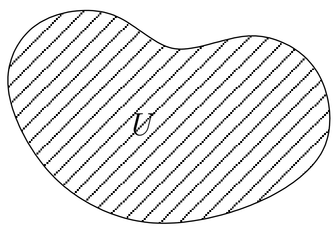
$\underline{\mathcal{C}_2}$: $\quad \vec{F}\big(\vec{r}_2(t)\big) = (t^4, 2t^3), \; \dfrac{d\vec{r}_2}{dt} = (1, 2t) \Longrightarrow \vec{F}\big(\vec{r}_2(t)\big) \cdot \dfrac{d\vec{r}_2}{dt} = t^4 + (2t)(2t^3) = 5t^4$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 5t^4 \, dt = \Big[t^5 \Big]_{t=0}^{t=1} = 1$$

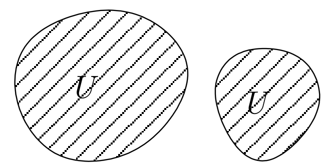
Likhet av linjeintegraler med samma ändpunkter är "typisk" för konservativa fält. Faktiskt har $\vec{F}$ en potential nämligen xy^2!

4.4 Sambandet mellan linjeintegraler och potentialer

En öppen mängd U kallas <u>sammanhängande</u> om två punkter i U alltid kan förbindas genom en glatt kurva i U.



sammanhängande



ej sammanhängande

Sats: Om $\vec{F}$ har en potential φ på en öppen mängd U, så gäller för varje (glatt) kurva $\mathcal{C}$ i U att

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\text{sista punkten}) - \varphi(\text{första punkten}).$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \Big(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} \Big) dt \\ &\stackrel{\text{kedjeregel}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi\big(x(t), y(t)\big) dt \\ &= \varphi\big(x(b), y(b)\big) - \varphi\big(x(a), y(a)\big). \end{aligned}$$

Om vi redan vet att $\vec{F}$ har en potential φ på en öppen mängd U, kan vi rekonstruera φ på följande sätt:

1) Välj en referenspunkt $(x_0, y_0) \in U$.

2) För varje $(x, y) \in U$ sätt $\widetilde{\varphi}(x, y) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där $\mathcal{C}$ är en glatt kurva i U från (x_0, y_0) till (x, y).

Ovanstående sats innebär att $\widetilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)$. Observera att $\varphi(x_0, y_0)$ är konstant.

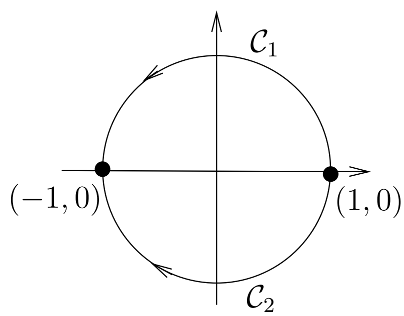
Anmärkning: Om U är sammanhängande är differensen av två potentialer till $\vec{F}$ en konstant

$$\text{ty: } \nabla(\varphi_1 - \varphi_2) = \vec{F} - \vec{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \text{ konstant.}$$

Antag att $\vec{F}$ uppfyller integrabilitetsvillkoret. Ger ovanstående metoden alltid en potential?

<u>Nej:</u> $\vec{F}(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y\vec{\imath}+x\vec{\jmath})$ uppfyller integrabilitetsvillkoret på $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Förbind $(1,0)$ och $(-1,0)$ på två olika sätt:

$\mathcal{C}_1 \ : \ \big(\cos(\theta), \quad \sin(\theta)\big),$
$\mathcal{C}_2 \ : \ \big(\cos(\theta), -\sin(\theta)\big),$
där $0 \leq \theta \leq \pi$.



Man beräknar $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi$, $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\pi$. Alltså har $\vec{F}$ ingen potential på $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Utan bevis: Om U är $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ett halfplan, en öppen skiva eller ett öppet klot, så ger metoden en potential för varje funktion som uppfyller integrabilitetsvillkoret.

Exempel: $\vec{F}(x,y,z) = (z+yz)\vec{\imath} + (xz-2)\vec{\jmath} + (x+xy)\vec{k}$.

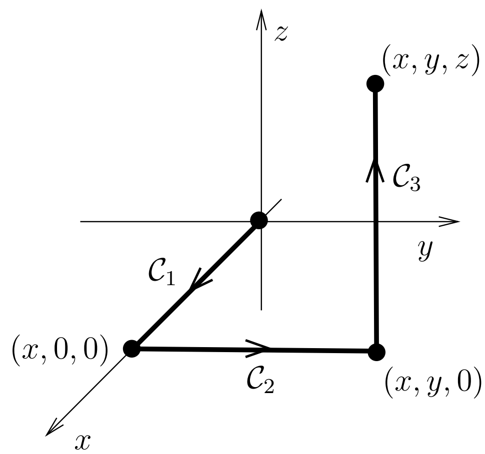
Integrabilitetsvillkoret är uppfyllt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(z+yz) &= 1 = \frac{\partial}{\partial x}(xz-2), \\
\frac{\partial}{\partial z}(z+yz) &= 1+y = \frac{\partial}{\partial x}(x+yx), \\
\frac{\partial}{\partial z}(xz-2) &= x = \frac{\partial}{\partial y}(x+yx).
\end{aligned}$$

Vi tar $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ som referenspunkt och kurvan från $(0,0,0)$ till (x,y,z) som $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ med

$\mathcal{C}_1 : (tx, 0, 0)$
$\mathcal{C}_2 : (x, ty, 0)$
$\mathcal{C}_3 : (x, y, tz)$

för $0 \le t \le 1$.



$$\Longrightarrow \qquad \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

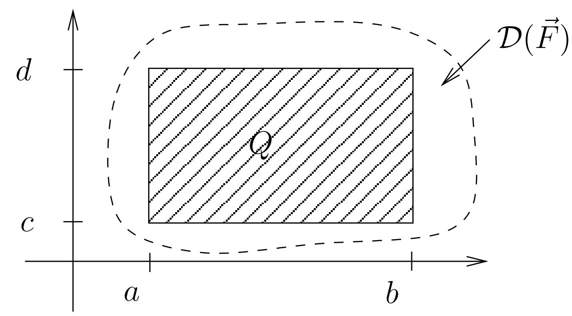
där

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;&\overset{y'=z'=0}{=}\; \int_{\mathcal{C}_1} (z + yz)\, dx = \int_{\mathcal{C}_1} 0\, dt = 0,\\
\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;&\overset{x'=z'=0}{=}\; \int_{\mathcal{C}_2} (xz - 2)\, dy = \int_0^1 (-2)y\, dt = -2y,\\
\int_{\mathcal{C}_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;&\overset{x'=y'=0}{=}\; \int_{\mathcal{C}_3} (x + xy)\, dz = \int_0^1 (x + xy)z\, dt = xz + xyz.
\end{aligned}$$

Alltså $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = xz + xyz - 2y$. Det är faktiskt en potential till $\vec{F}$.

4.5 Greens formel

Problem: Låt $\vec{F} = F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath}$ vara ett glatt vektorfält nära $Q = [a,b] \times [c,d]$. Orientera $\mathcal{C} = \partial Q$ moturs.



Kan $\displaystyle\int_{\partial Q} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ beräknas via integration över Q?

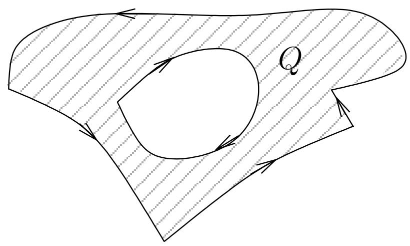
$$
\begin{aligned}
\int_{\partial Q} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \Big(F_1(t,c) - F_1(t,d)\Big)\, dt + \int_c^d \Big(F_2(b,t) - F_2(a,t)\Big)\, dt \\
&= -\int_a^b \int_c^d \frac{\partial F_1}{\partial y}(t,s)\, ds\, dt + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x}(t,s)\, ds\, dt \\
&= \int_a^b \int_c^d \Big(F_{2,x} - F_{1,y}\Big)\, dx\, dy \\
&= \iint\limits_Q \Big(F_{2,x} - F_{1,y}\Big)\, dA
\end{aligned}
$$

Alltså har vi bevisat att

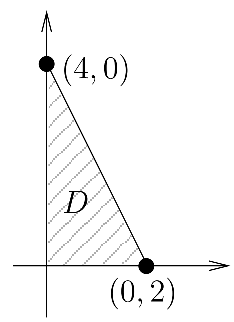
$$
\boxed{\int_{\partial Q} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_Q (F_{2,x} - F_{1,y})\, dA} \qquad (G)
$$

(Greens formel)

(G) gäller för alla begränsade öppna mängder med "glatt" rand, t.ex. om ∂Q är en förening av ändligt många glatta kurvor som bara skär varandra i ändpunkter. ∂Q måste orienteras så att Q alltid ligger till vänster då ∂Q genomlöpes.



Exempel: Bestäm $\int_{\mathcal{C}}(2y^3-\sin(x)+2y)\,dx+(6xy^2+x+y^5)\,dy$ där $\mathcal{C}$ genomlöper randen av $D: 2x+y<4,\ x>0,\ y>0$ medurs.



Låt $\mathcal{C}^+ = \partial D$ orienterad moturs. Vi får

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}}(2y^3-\sin(x)+2y)\,dx+(6xy^2+x+y^5)\,dy \\
&= -\int_{\mathcal{C}^+}(2y^3-\sin(x)+2y)\,dx+(6xy^2+x+y^5)\,dy \\
&\overset{\text{Green}}{=} -\iint_D \Big((6xy^2+x+y^5)_x-(2y^3-\sin(x)+2y)_y\Big)\,dA \\
&= -\iint_D \Big((6y^2+1)-(6y^2+2)\Big)\,dA \\
&= -\iint_D (-1)\,dA \\
&= \text{area}(D) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

5 Ytor i rymden

5.1 Ytor på parameterform

En yta på parameterform ges genom en vektorfunktion

$$\mathcal{S} : \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{k}$$

där (u,v) tillhör ett parameterområde $D_{u,v} \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$.

Exempel:

a) För $a > 0$ parametriserar $\vec{r}(u,v) = a\Big(\cos(u)\sin(v)\vec{\imath} + \sin(u)\sin(v)\vec{\jmath} + \cos(v)\vec{k}\Big)$

där $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ den övre halvsfären med centrum i origo och radie a (jämför med sfäriska koordinater!).

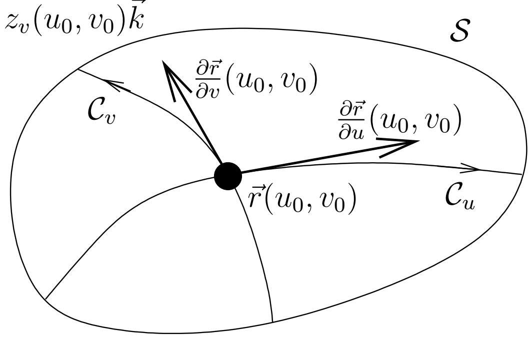
b) $\vec{r}(u,v) = (u+v)\vec{\imath}$, $0 \le u, v \le 1$, parametriserar sträckan mellan origo och $(2,0,0)$. En sådan yta kan betraktas som entartad.

5.2 Normalvektor

Antag att $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ är definierade och glatta på ett öppet parameterområde $D \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$. Genom en punkt $\vec{r}(u_0,v_0) = x(u_0,v_0)\vec{\imath} + y(u_0,v_0)\vec{\jmath} + z(u_0,v_0)\vec{k}$ löper kurvor $\mathcal{C}_u : \vec{r}(u,v_0)$ och $\mathcal{C}_v : \vec{r}(u_0,v)$. Deras hastighetsvektorer

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) &= x_u(u_0,v_0)\vec{\imath} + y_u(u_0,v_0)\vec{\jmath} + z_u(u_0,v_0)\vec{k}, \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0) &= x_v(u_0,v_0)\vec{\imath} + y_v(u_0,v_0)\vec{\jmath} + z_v(u_0,v_0)\vec{k}
\end{aligned}$$

är tangentiella mot $\mathcal{S}$.



Vektorn

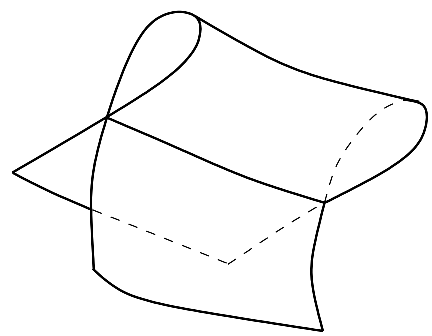
$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$$

kallas för normalvektorn i (u_0, v_0). Om $\vec{n}(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0)$ säger vi att parametriseringen är reguljär i (u_0, v_0).

Exempel: $\vec{r}(u, v) + (u + v)\vec{\imath}$, $0 < u, v < 1$ är inte reguljär. I en godtycklig (u_0, v_0) gäller

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \vec{\imath} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}(u_0, v_0) = \vec{\imath} \times \vec{\imath} = (0, 0, 0).$$

Anmärkning: För reguljära parametrar ser $\mathcal{S}$ verkligen ut som en "geometrisk" yta. Självskärningspunkter kan förekomma.



Vi beräknar $\vec{n}$:s komponenter

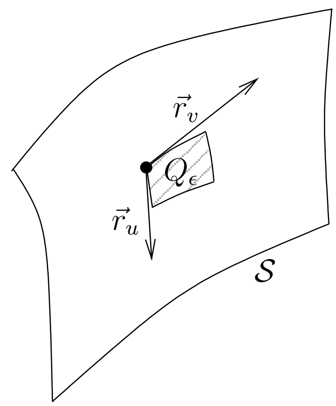
$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\
&= (y_u z_v - y_v z_u)\vec{\imath} + (x_v z_u - x_u z_v)\vec{\jmath} + (x_u y_v - x_v y_u)\vec{k} \\
&= \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\vec{\imath} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\vec{\jmath} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\vec{k}
\end{aligned}$$

5.3 Area av en yta

Vi börjar genom att approximera area(Q_ϵ) där Q_ϵ är delen av $\mathcal{S}$ som motsvarar rektangeln $u_0 \leq u \leq u_0 + \epsilon$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \epsilon$.

Om $0 < \epsilon < 1$ gäller

$$\begin{aligned} \text{area}(Q_\epsilon) &\approx \Big|\epsilon \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \epsilon \vec{r}_v(u_0, v_0)\Big| \\ &= \epsilon^2 \Big|\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)\Big| \\ &= \epsilon^2 \left|\vec{n}_u(u_0, v_0)\right| \end{aligned}$$



Följaktigen är arean till delen $Q_\mathcal{S}$ av $\mathcal{S}$ som motsvarar ett område Q i parameterområdet[1]

$$\text{area}(Q_\mathcal{S}) = \iint_Q |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv. \qquad (\star)$$

Om vi skriver

$$\begin{aligned} d\mathcal{S} &= |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} \, du \, dv \end{aligned}$$

för $\mathcal{S}$:s areaelement, blir $(\star)$

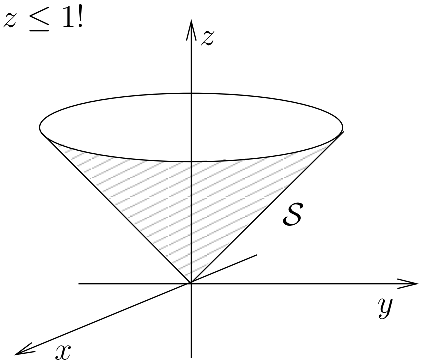
$$\text{area}(Q_\mathcal{S}) = \iint_Q d\mathcal{S}.$$

Låt $f(x,y,z)$ vara en funktion nära $\mathcal{S}$. Vi får

$$\iint_Q f(x,y,z) d\mathcal{S} = \iint_Q f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv.$$

[1]Strängt taget antar vi att $\vec{r}$ är glatt nära Q och ∂Q och att vi kan integrera över Q!

Exempel: Bestäm $\iint\limits_{Q} z\,d\mathcal{S}$ för $\mathcal{S}: z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$!



På $\mathcal{S}$: $0 \le z \le 1$
$\iff \sqrt{x^2+y^2} \le 1.$

Vi tar parametriseringen
$\vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + \sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad \vec{r}_x(x,y) &= \vec{\imath} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}, \vec{r}_y(x,y) \;=\; \vec{\jmath} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k} \\
\Longrightarrow\quad \vec{r}_x \times \vec{r}_y &= \vec{k} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\imath} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\jmath}.
\end{aligned}$$

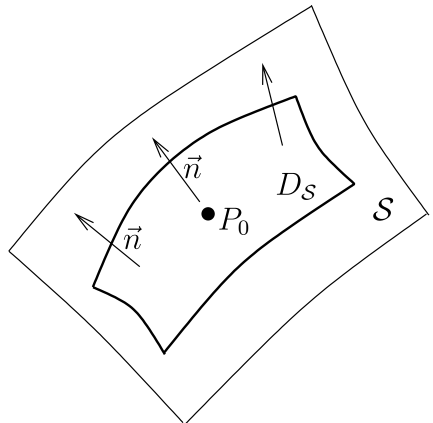
Observera att $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ inte är definierade i $(0,0)$!

$$\begin{aligned}
d\mathcal{S} &= |\vec{r}_x \times \vec{r}_y|\,dx\,dy \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy \\
&= \sqrt{2}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \iint\limits_{\mathcal{S}} z d\mathcal{S} = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\epsilon^1 r^2\,dr = \sqrt{2}\,2\pi \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{3}(1-\epsilon^3) = \frac{\sqrt{2}^3\pi}{3}.$$

5.4 Flödet genom en yta

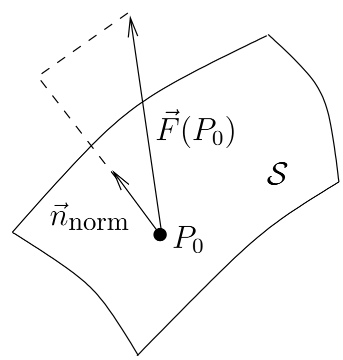
Låt D vara ett enkelt område i $\mathbb{R}^2_{u,v}$ och parametriseringen $\mathcal{S} : \vec{r}(u,v)$ vara glatt nära D med $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq (0,0,0)$.



Sätt $D_{\mathcal{S}} = \vec{r}(D)$.

Låt $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$
vara glatt nära $\mathcal{S}$.

Vad är $\vec{F}$:s flöde genom $D_{\mathcal{S}}$ i riktning av $\vec{n}$?



I en punkt $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ är $\vec{F}$:s "bidrag"

$$\vec{F}(P_0) \cdot \vec{n}_{\text{norm}}$$

där $\vec{n}_{\text{norm}}(u_0,v_0) = \frac{1}{|\vec{n}(u_0,v_0)|}\vec{n}(u_0,v_0)$.
($\vec{n}_{\text{norm}}(u_0,v_0)$ är en enhetsvektor!)

Det totala flödet blir

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \vec{n}_{\text{norm}}(u,v)\, d\mathcal{S} &= \iint\limits_{D} \Big(\vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \frac{\vec{n}(u,v)}{|\vec{n}(u,v)|}\Big)||\, du\, dv \\
&= \iint\limits_{D} \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \vec{n}(u,v)\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Exempel: Beräkna flödet av $\vec{F} = z\vec{\imath} + x^2\vec{k}$ nedåt genom ytan $z = x^2 + y^2$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$!

För parametriseringen $\vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (x^2+y^2)\vec{k}$ får vi

$$\vec{F}\big(\vec{r}(x,y)\big) = \vec{F}(x,y,x^2+y^2) = (x^2+y^2)\vec{\imath} + x^2\vec{k}$$

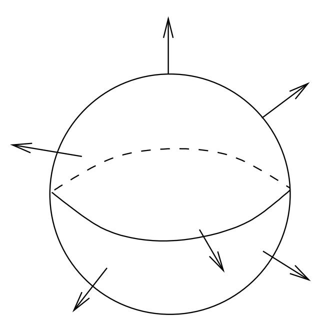
och

$$\begin{aligned} \vec{r}_x(x,y) &= \vec{\imath} + 2x\vec{k}, \qquad \vec{r}_y(x,y) = \vec{\jmath} + 2y\vec{k}, \\ &\Longrightarrow \qquad \vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y) = \vec{k} - 2y\vec{\jmath} - 2x\vec{\imath} \end{aligned}$$

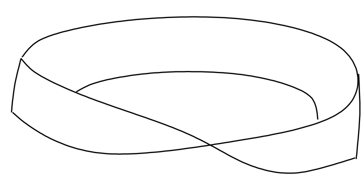
som pekar uppåt. Man måste alltså använda sig av $-\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \vec{r}_y \times \vec{r}_x$.
Flödet är

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big((x^2+y^2)\vec{\imath} + x^2\vec{k}\Big) \cdot \Big(2x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} - \vec{k}\Big)\, dx\, dy \\ &= \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \Big(2x^3 + 2xy^2 - x^2\Big)\, dx = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x)\, dx = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Också för ytor med komplicerad geometri kan man beräkna flödintegraler om $\mathcal{S}$ är orienterbar, d.v.s. om det finns på $\mathcal{S}$ ett kontinuerligt normalfält $\vec{n}$ utan nollställen.



orienterbar



ej orienterbar

Exempel: Flödet av vektorfältet $\vec{F} = m\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ ut ur sfären $\mathcal{S}$ med centrum i origo och radie a.

Observera att $\mathcal{S}$ är orienterbar.

I punkten $\vec{r} \in \mathcal{S}$ är normalfältet $\vec{n}_{\text{norm}}$ som pekar ut ur sfären lika med $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{a}$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{F} \cdot \vec{n}_{\text{norm}} = \frac{m}{|\vec{r}|^4} \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{r})}_{=|\vec{r}|^2} = \frac{m}{|\vec{r}|^2} = \frac{m}{a^2} \quad \text{gäller för alla } \vec{r} \text{ på } \mathcal{S}$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\text{norm}} \, d\mathcal{S} = \frac{m}{a^2}\text{area}(\mathcal{S}) = \frac{m}{a^2} a^2 4\pi = 4\pi m.$$

6 Vektorkalkyl i rymden, Satser av Gauss och Stokes

6.1 Nablakalkyl

Vi betraktar nablaoperatorn $\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. ∇ används på tre sätt:

1. <u>Gradient av en funktion $f = f(x, y, z)$:</u>

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

2. <u>Divergens av ett vektorfält $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$:</u>

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath} + F_3\vec{k}\right) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{aligned}$$

3. Rotation av ett vektorfält $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Alltså gäller

∇ funktion $=$ vektorfält

$\nabla\cdot$ vektorfält $=$ funktion

$\nabla\times$ vektorfält $=$ vektorfält

Ofta skriver man $\nabla f = \mathrm{grad} f$, $\nabla \cdot \vec{F} = \mathrm{div}\vec{F}$, $\nabla \times \vec{F} = \mathrm{curl}\vec{F}$ (eller rot$\vec{F}$).

Identiteter för grad, div, curl:

Det finns flera "produktregler" (s. rutan på s. 859)

Exempel: $\nabla \cdot (\varphi\vec{F}) = \nabla\varphi \cdot \vec{F} + \varphi(\nabla \cdot \vec{F})$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\varphi\vec{F}) &= \nabla\big(\varphi F_1\vec{\imath} + \varphi F_2\vec{\jmath} + \varphi F_3\vec{k}\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi F_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi F_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi F_3) \\
&= \varphi_x F_1 + \varphi F_{1,x} + \varphi_y F_2 + \varphi F_{2,y} + \varphi_z F_3 + \varphi F_{3,z} \\
&= \varphi\big(F_{1,x} + F_{2,y} + F_{3,z}\big) + \varphi_x F_1 + \varphi_y F_2 + \varphi_z F_3 \\
&= \varphi\nabla\vec{F} + (\varphi_x\vec{\imath} + \varphi_y\vec{\jmath} + \varphi_z\vec{k}) \cdot (F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath} + F_3\vec{k}) \\
&= \nabla\varphi \cdot \vec{F} + \varphi(\nabla \cdot \vec{F})
\end{aligned}$$

Det finns två sätt att sammansätta olika varianter av nablaoperatorn. Båda ger noll.

Sats:

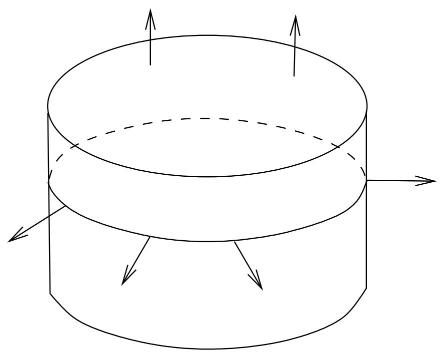
a) $\nabla \times (\nabla f) = 0$ "gradientfält är virvelfira".

b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ "rotationsfält är källfira".

6.2 Gauss' divergenssats

Låt D vara ett begränsat område i rymden ("begränsat" menar att D ligger i ett stort klot med ändlig radie).

Antag att $\mathcal{S} = \partial D$ är en glatt yta med ett normerat normalfält $\vec{N}$ som visar ut ur området D.



Då gäller för varje vektorfält $\vec{F}$ som är glatt nära $D \cup \partial D$

$$\boxed{\iiint\limits_{D} \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\mathcal{S}}$$

Anmärkning: $\iint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\mathcal{S}$ är det globala flödet av $\vec{F}$ ut ur D.

Exempel: Bestäm $\iint\limits_{\partial D} (x^2 + y^2) d\mathcal{S}$ för $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Normalfältet är $\vec{N} = \frac{1}{a}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$. Vi söker $\vec{F}$ sådant att $\vec{F} \cdot \vec{N} = x^2 + y^2$. Det gäller för $\vec{F} = a(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$. Divergenssatsen ger

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial D} (x^2 + y^2)\, d\mathcal{S} &= \iint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\mathcal{S} = \iiint\limits_{D} \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iiint\limits_{D} (2a)\, dV \\
&= 2a \text{ area}(D) = 2a \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8}{3}\pi a^4.
\end{aligned}$$

$\iiint\limits_D \nabla \cdot \vec{F}\, dV$ kan tolkas som den lokala källstyrkan av $\vec{F}$ i D:

Låt (x_0, y_0, z_0) vara en inre punkt av D och $\mathcal{S}_\epsilon$ sfären med centrum i (x_0, y_0, z_0) och radie $\epsilon > 0$/ Divergenssatsen ger

$$\implies \iint\limits_{\mathcal{S}_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\mathcal{S} = \iiint\limits_{B_\epsilon} \nabla \cdot \vec{F}\, dV \overset{\text{om } \epsilon \text{ litet}}{\approx} \nabla \vec{F}(x_0, y_0, z_0)\mathrm{vol}(B_\epsilon)$$

$$= \epsilon^3 \frac{4\pi}{3} \nabla \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$$

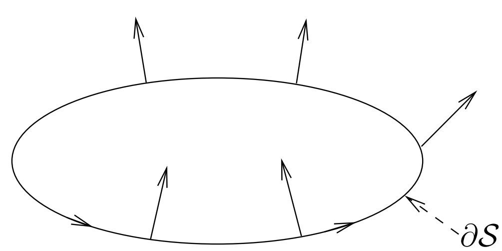
Alltså mäter $\nabla \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$ materialet som läggs till / tas bort i (x_0, y_0, z_0), d,v,s den lokala källstyrkan i (x_0, y_0, z_0),

6.3 Stokes' sats

Låt $\mathcal{S}$ vara en glatt yta i $\mathbb{R}^3$ med glatt randkurva $\partial\mathcal{S}$. Välj ett kontinuerligt normerat normalfält $\vec{N}$ på $\mathcal{S}$.

Orientera $\partial\mathcal{S}$ enligt skruvregeln.

När $\vec{N}$ genomlöper $\partial\mathcal{S}$
måste $\mathcal{S}$ ligger till vänster.

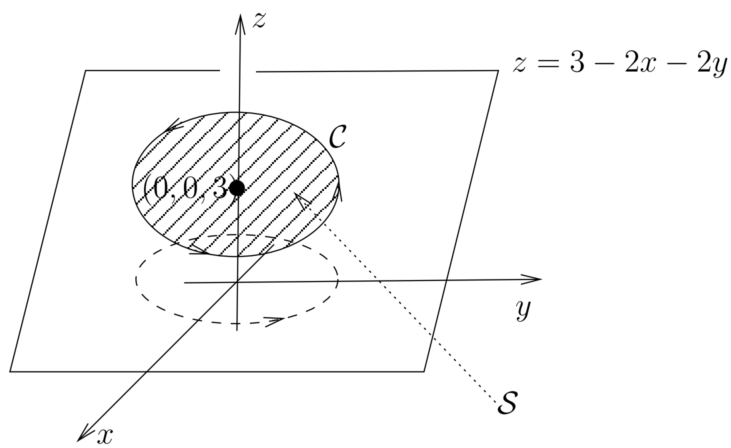


Då gäller för varje vektorfält $\vec{F}$ som är glatt nära $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N}\, d\mathcal{S} = \int_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Exempel: Bestäm $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ där $\vec{F} = -y^3\vec{\imath} + x^3\vec{\jmath} - z^3\vec{k}$ och $\mathcal{C}$ är snittet av cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$ och planet $2x + 2y + z = 3$ orienterar så att $\mathcal{C}$:s projektion på (x, y)-planet är orienterad moturs.

<u>Skiss</u>



Planet $z = 2 - 2x - 2y$ parametriseras av $\vec{r}(x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (2 - 2x - 2y)\vec{k}$ och vi får

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{\imath} - 2\vec{k}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{\jmath} - 2\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$$

Enligt skissen måste vi välja $\vec{N} = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Eftersom $d\mathcal{S} = |\vec{n}|\, dx\, dy$ får vi

$$\Longrightarrow \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{N}\, d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dx\, dy$$

Vi beräknar

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{F} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(x^3)\right]\vec{\imath} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(-y^3) - \frac{\partial}{\partial x}(-z^3)\right]\vec{\jmath} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^3)\right]\vec{\imath} \\
&= 3(x^2 + y^2)\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dx\, dy = 3 \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \frac{3\pi}{2}.$$