

Lösning till övning 2

Flervariabelanalys

1. a) Eftersom $f_x(x, y) = y + 2$, $f_y(x, y) = x - 1$ är punkten $(1, -2)$ kritisk.

Eftersom $f_{xx}(x, y) = 0$, $f_{xy}(x, y) = 1$, $f_{yy}(x, y) = 0$ är

$$\det H(1, -2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Det visar att den kritiska punkten $(1, -2)$ är en sadelpunkt.

b) $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = 4y^3 - 4x$.

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 \end{cases} \quad (1)$$

$(0, 0)$ kritisk.

Om $(x, y) \neq (0, 0)$ kritisk så ger (1) att både $x \neq 0$ och $y \neq 0$. Eftersom $x \neq 0$ följer från $x = y^3 = (x^3)^3 = x^9$ att $x^8 = 1$ så att vi får $x = \pm 1$. Alltså är också punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$ kritiska.

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 12y^2.$$

$$\det H(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -16 < 0 \implies (0, 0) \text{ sadelpunkt,}$$

$$\det H(1, 1) = \det H(-1, -1) = \det \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = 128 > 0 \text{ och } f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) > 0 \\ \implies (1, 1), (-1, -1) \text{ lokala minima.}$$

c) $f_x(x, y) = 3x^2$, $f_y(x, y) = 3y^2 - 3 \implies (0, 1), (0, -1)$ kritiska.

$f_{xx}(x, y) = 6x$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 6y \implies \det H(0, 1) = \det H(0, -1) = 0$.
Second-derivative test kan inte avgöra om $(0, \pm 1)$ är extrema eller sadelpunkter.

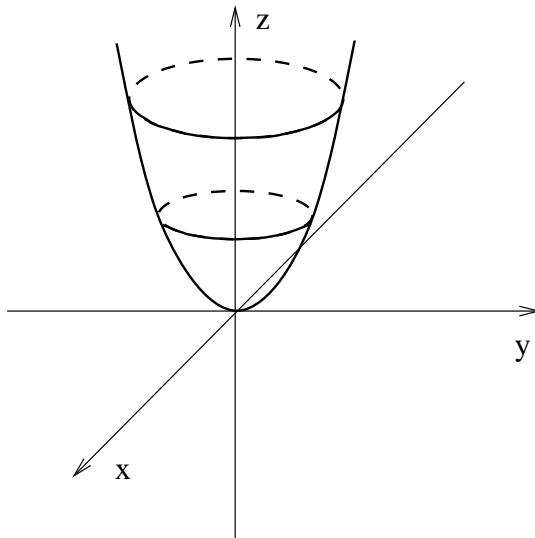
$$f(x, 1) = x^3 - 2 \begin{array}{l} > -2 = f(0, 1) \text{ om } x > 0 \\ < -2 = f(0, 1) \text{ om } x < 0 \end{array} \implies (1, 0) \text{ sadelpunkt.}$$

Samma argument visar att $(0, -1)$ är också en sadelpunkt.

2. $\nabla f(x, y) = (4x - 3y, -3x)$.

$0 = \nabla f(x, y) \cdot (1, -2) = 10x - 3y \iff y = \frac{10}{3}x$. Den sökta mängden är linjen $y = \frac{10}{3}x$.

3. Först undersöker vi nollnivån $x^2 + y^2 - z = 0$. Den är grafen till funktionen $z = x^2 + y^2$, som är en paraboloid. Man får den genom att rotera en parabel kring z -axeln.



Genom en förskjutning får vi nivåmängden för en allmän $c \in \mathbb{R}$.

