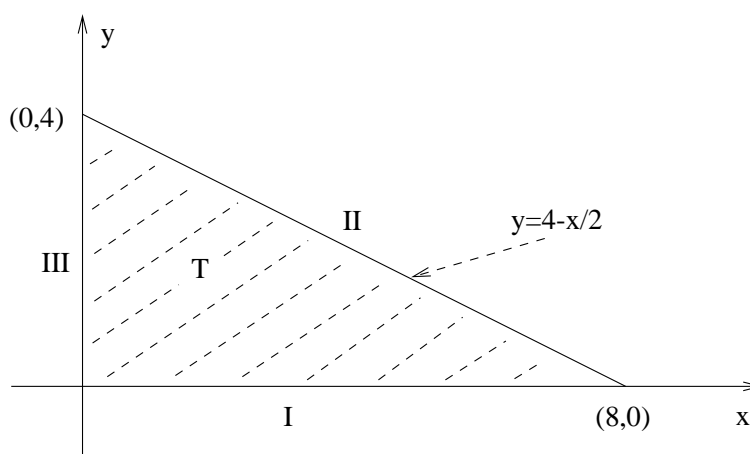


Lösning till övning 3 Flervariabelanalys

1.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq \frac{x}{2} - 4 \end{array} \right\} \text{ger triangeln}$$



De inre punkterna i T beskrivs genom $x > 0$, $y > 0$, $y + \frac{x}{2} < 4$.

Kritiska punkter: $f_x(x, y) = y - 2$, $f_y(x, y) = x - 1 \implies (1, 2)$ är kritisk och en inre punkt (eftersom $1 > 0$, $2 > 0$, $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} < 4$) $\implies (1, 2)$ kandidat.

Undersökning av randen: Dela upp randen i tre sträckor I, II, III (se skiss).

I: $g_I(x) = f(x, 0) = -2x$, $0 \leq x \leq 8$. Eftersom $g'_I(x) = -2 \neq 0$ får vi randpunkterna $(0, 0)$ och $(8, 0)$ som kandidater.

II: $g_{II}(x) = f(x, 4 - \frac{x}{2}) = x(4 - \frac{x}{2}) - 2x - (4 - \frac{x}{2}) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - 4$, $0 \leq x \leq 8$. Eftersom $g'_{II}(x) = -x + \frac{5}{2}$ är $x = \frac{5}{2}$ kritisk. Observera att $0 < \frac{5}{2} < 8$. Vi får alltså kandidater i punkterna $(\frac{5}{2}, 4 - \frac{5}{4}) = (\frac{5}{2}, \frac{11}{4})$ och i $(0, 4)$, $(8, 0)$.

III: $g_{III}(y) = f(0, y) = -y$, $0 \leq y \leq 4$. Eftersom $g'_{III}(y) = -1 \neq 0$ får vi kandidaterna $(0, 0)$ och $(0, 4)$.

Jämför kandidaterna: Vi får $f(1, 2) = -2$, $f(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}) = -\frac{7}{8}$, $f(0, 0) = 0$, $f(8, 0) = -16$, $f(0, 4) = -4 \implies$ minimum i $(8, 0)$, maximum i $(0, 0)$.

2. Med $f(x, y, z) = x - y + z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ blir Lagrangefunktionen $L(x, y, z, \lambda) = x - y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$.

$$L_x(x, y, z, \lambda) = 1 + 2\lambda x, \quad (1)$$

$$L_y(x, y, z, \lambda) = -1 + 2\lambda y, \quad (2)$$

$$L_z(x, y, z, \lambda) = 1 + 2\lambda z, \quad (3)$$

$$L_\lambda(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 4. \quad (4)$$

Om (x, y, z, λ) är kritisk så $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ på grund av (4). (1), (2), (3) $\implies x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

$$(1) \implies x = -\frac{1}{2\lambda}. \quad (2) \implies y = \frac{1}{2\lambda}. \quad (3) \implies z = -\frac{1}{2\lambda}. \quad \text{Alltså gäller } x = z = -y.$$

$$(4) \implies 4 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (-x)^2 + x^2 = 3x^2 \\ \implies x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

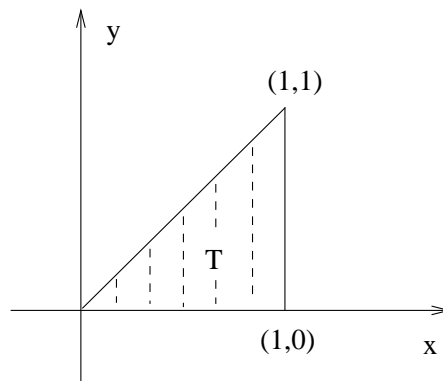
Vi får kandidater $\frac{2}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$, $\frac{2}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$.

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}, \quad f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{3}.$$

Eftersom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ är kompakt är $\frac{2}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ maximum och $\frac{2}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$ minimum.

3. Integrationsområdet ges genom $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right\}$

Observera att T är y -enkelt.



$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^x (xy + y^2) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x xy dy + \int_0^1 dx \int_0^x y^2 dy \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^x y dy + \int_0^1 dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx + \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \int_0^1 x^3 dx \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$