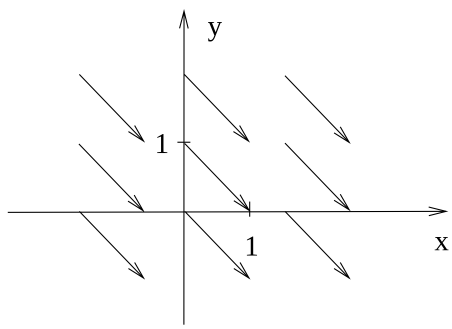
Egmont Porten
Mittuniversitetet
DMA

Höst 2013/2014

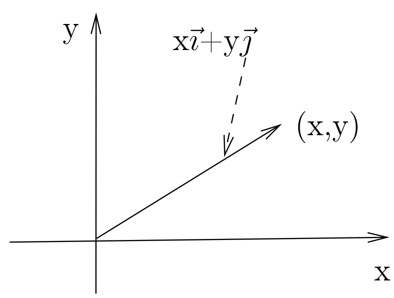
Lösning till övning 5
Flervariabelanalys

---

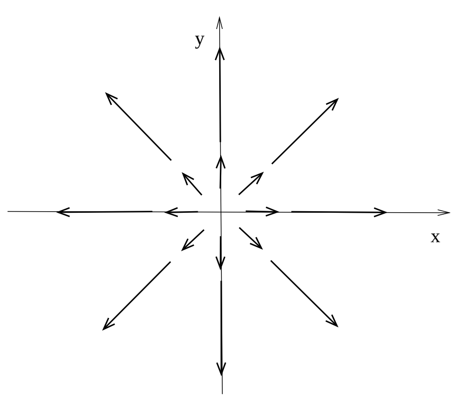
1. a) $\vec{F} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ är konstant:



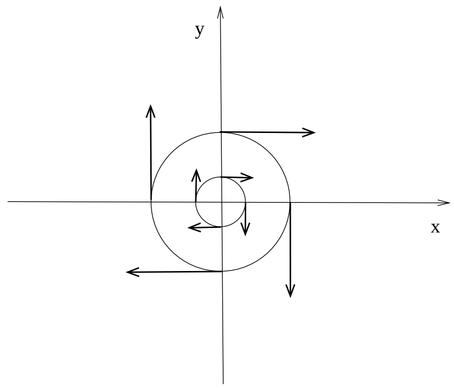
Observera att $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ är
vektorn från origo till punkten (x, y).



I skissen för $\vec{G}$ måste vi rita den med fotpunkt i (x, y):



Vektorn $y\vec{\imath} - x\vec{\jmath}$ erhålls genom att rotera $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ $90°$ medurs (jämnför med 15.1, ex. 2).



b) $F_1 = 1$, $F_2 = -1$. Integrera $dx = -dy \implies y = -x + c$. Fältlinjerna är raka linjer med riktningskoeffizient -1.

$G_1 = x$, $G_2 = y$. Metoden börjar med $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$. Integration ger

$$\ln|x| + C_2 = \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1 \implies \ln|y| = \ln|x| + C$$
$$\implies |y| = e^C|x|.$$

Sätt $K = e^C > 0$. För $K > 0$ får vi linjerna $y = \pm Kx$. Dessutom är både x- och y-axeln fältlinjerna.

$H_1 = y$, $H_2 = -x$.

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \implies y\,dy = -x\,dx$$
$$\implies \frac{y^2}{2} + C_1 = \int y\,dy = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_2$$
$$\implies x^2 + y^2 = C.$$

Fältlinjerna är koncentriska cirklar med radie i $(0,0)$.

c) $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$, $x - y + C$ är potentialer.

$\dfrac{\partial G_1}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial G_2}{\partial x}$, $\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$ är potentialer.

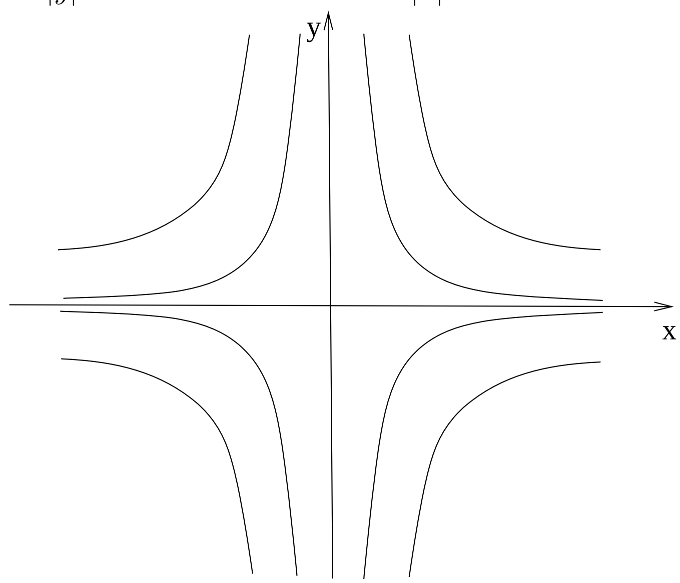
$\dfrac{\partial H_1}{\partial y} = 1 \neq -1 = \dfrac{\partial H_2}{\partial x}$, det finns inga potentialer.

2. $F_1 = x$, $F_2 = -2y$.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = -\frac{dy}{2y} \implies \ln|y| + C_1 = \int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x} = -2\ln|x| + C_2$$
$$\implies \ln|y| = -2\ln|x| + C$$
$$\implies |y| = e^{\ln|y|} = e^C e^{-2\ln|x|} = K|x|^{-2}$$

där $K = e^C > 0$.

För $K > 0$ är $|y| = K/|x|^2$ en förening av fyra kurvor. x- och y-axlerna är också fältlinjer.



3. a) $F_1 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = -\dfrac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\quad F_2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial y}$.

b) Vi parametriserar

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : &\quad \vec{r}_1(t) = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath}, \\ \mathcal{C}_2 : &\quad \vec{r}_2(t) = \cos(t)\vec{\imath} - \sin(t)\vec{\jmath}, \end{aligned}$$

för $0 \le t \le \pi$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi \frac{1}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \Big((-\sin(t))(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) \Big) dt \\ &= \int_0^\pi dt \\ &= \pi, \\ \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi \frac{1}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \Big(\sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)(-\cos(t)) \Big) dt \\ &= -\int_0^\pi dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$