Egmont Porten
Mittuniversitetet
DMA

Höst 2013/2014

Lösning till övning 6
Flervariabelanalys

---

1. a) $\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \sin z \neq \cos(z) = \dfrac{\partial F_3}{\partial y} \implies \vec{F}$ är inte konservativt.

b) Integrabilitetsvillkoren är uppfyllda:

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial G_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial G_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial G_2}{\partial z} = \sin(z) = \frac{\partial G_2}{\partial y}.$$

Eftersom det gäller på hela $\mathbb{R}^2$ ser vi att det finns en potential.

Första metoden:

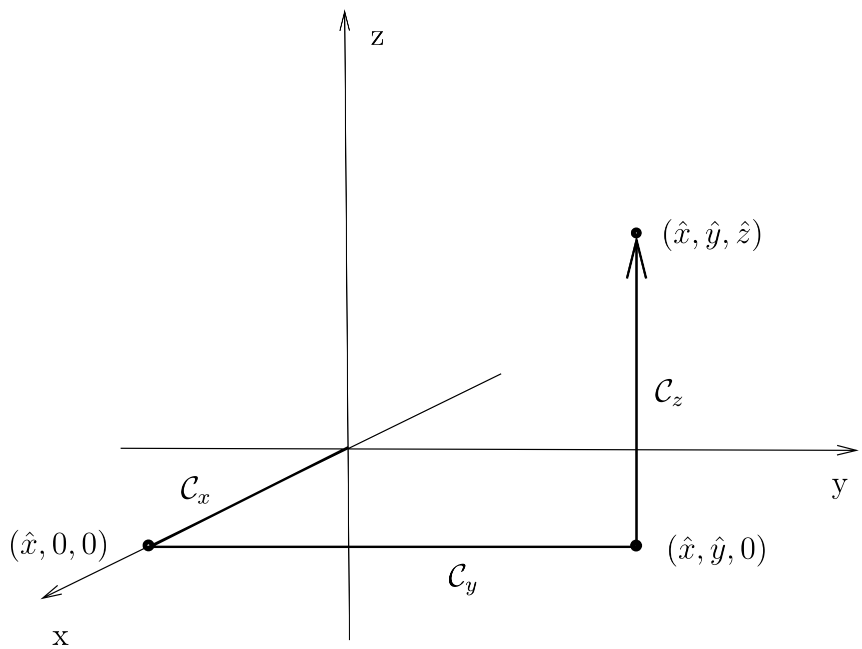
En potential φ måste uppfylla $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy \implies \varphi(x,y,z) = x^2 y + C(y,z)$.

$$\begin{aligned} x^2 - \cos(z) \;=\; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y} \quad &\implies \quad C(y,z) = -y\cos(z) + D(z) \\ &\implies \quad \varphi(x,y,z) = x^2 y - y\cos(z) + D(z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\sin(z) \;=\; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \;=\; \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^2 y - y\cos(z) + D(z)\Big) \quad &\implies \quad \frac{\partial}{\partial z} D(z) = 0 \\ &\implies \quad D(z) \text{ konstant} \\ &\implies \quad \varphi(x,y,z) = x^2 y - y\cos(z) + K. \end{aligned}$$

Man ser direkt att dessa φ är potentialer.

Andra metoden:



För $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \mathbb{R}^3$ betraktar vi kurvorna $\mathcal{C}_x$, $\mathcal{C}_y$, $\mathcal{C}_z$ som i figuren och $\mathcal{C} = \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \cup \mathcal{C}_z$. Vi parametiserar

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x &: (t\hat{x}, 0, 0), \quad 0 \le t \le 1, \\ \mathcal{C}_y &: (\hat{x}, t\hat{y}, 0), \quad 0 \le t \le 1, \\ \mathcal{C}_z &: (\hat{x}, \hat{y}, t\hat{z}), \quad 0 \le t \le 1, \end{aligned}$$

och beräknar

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_x} \vec{G} \cdot d\vec{r} &= 0, \\ \int_{\mathcal{C}_y} \vec{G} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \Big(\hat{x}^2 - \cos(0)\Big)\hat{y}\, dt = \hat{x}^2\hat{y} - \hat{y}, \\ \int_{\mathcal{C}_z} \vec{G} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \hat{y}\sin(t\hat{z})\hat{z}\, dt = \hat{y}\hat{z}\int_0^1 \sin(t\hat{z})\, dt \overset{(\star)}{=} \hat{y}\hat{z}\left[-\frac{\cos(t\hat{z})}{\hat{z}}\right]_{t=0}^{t=1} = \hat{y} - \hat{y}\cos(\hat{z}). \end{aligned}$$

Observera att $(\star)$ bara gäller on $\hat{z} \neq 0$. Om $\hat{z} = 0$ gäller $\int_{\mathcal{C}_z} \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0 = \hat{y} - \hat{y}\cos(0)$. Alltså får vi

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_x} \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_y} \vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_\ddagger} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \hat{x}^2\hat{y} - \hat{y}\cos(\hat{z}).$$

Enligt anmärkningen efter sats 1 i 15.4 gäller $\varphi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) - \varphi(0,0,0) = \hat{x}^2\hat{y} - \hat{y}\cos\hat{z} + K$ för varje potential φ. Eftersom $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ är godtycklig, erhåller vi

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y - y\cos z + K.$$

2. Om $\vec{F}$ hade en potential skulle linjeintegralen ha samma värde för varje kurva i $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$. **3b)** visar att vi får olika värden för $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$.

3.

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}} (x^2 - x^2 y)dx + (xy^2 + e^y)dy \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} \Big(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2 + e^y) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - x^2 y) \Big) dx\, dy \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y^2) dx\, dy \\
&= \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$