Egmont Porten
Mittuniversitetet
DMA

Höst 2013/2014

Lösning till övning 7
Flervariabelanalys

---

1. Vi börjar med sidan $S_1 : 0 \leq x, y \leq 2$, $z = 0$. Denna sida kan parametriseras genom

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}, \quad 0 \leq x, y \leq 2$$

och vi får $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{\imath}$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{\jmath}$ och $\vec{n} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$. Eftersom $\vec{n}$ pekar in i T blir flödet genom S_1

$$-\iint\limits_{S_1} \vec{\jmath} \cdot \vec{k}\, dx\, dy = 0.$$

På samma sätt får man flödet noll genom sidorna

$$\begin{array}{ll} 0 \leq x, y \leq 2, & z = 2, \\ 0 \leq y, z \leq 2, & x = 0, \\ 0 \leq y, z \leq 2, & x = 2. \end{array}$$

Vi parametriserar nu $S_2 : 0 \leq x, z \leq 2$, $y = 0$ genom $\vec{r}(x,z) = x\vec{\imath} + z\vec{k}, \quad 0 \leq x, z \leq 2$. Flödet blir

$$-\int_0^2 dx \int_0^2 \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}\, dy = -4.$$

För $S_3 : 0 \leq x, z \leq 2$, $y = 2$ får vi flödet 4. Alltså är det totala flödet 0.

2. Vi börjar med den vertikala delen $\mathcal{S}_V$ parametriserad genom

$$\vec{r}(\theta, u) = 4\big(\cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}\big) + u\vec{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 5.$$

$\vec{r}_\theta = 4\big(-\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}\big)$, $\vec{r}_u = \vec{k}$ och $\vec{n} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_u = 4\big(\cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}\big)$. $\vec{n}$ visar ut ur D och flödet blir

$$\begin{aligned} & \int_0^5 du \int_0^{2\pi} \Big(4u\cos(\theta) + 16\sin(\theta)\cos(\theta)\Big) d\theta \\ = \; & 4\int_0^5 u\, du \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\, d\theta + 16\int_0^5 du \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta \\ = \; & 4\int_0^5 u\, du \Big[\sin(\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + 8\int_0^5 du \Big[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Om vi parametriserar den undre sidan $\mathcal{S}_u : x^2+y^2 \leq 16$, $z=0$ genom $\vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ är $\vec{n} = \vec{k}$ (som pekar inåt) och flödet blir

$$-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 16} (-3y^2 z)dx\,dy \stackrel{z=0}{=} 0.$$

$\mathcal{S}_o : x^2+y^2 \leq 16$, $z=5$ parametriserar vi genom $\vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + 5\vec{k}$. Nu pekar $\vec{n} = \vec{k}$ utåt och flödet blir

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{x^2+y^2\leq 16} (-3)5y^2\,dx\,dy &= -15\int_0^4 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\,d\theta \\
&= -15\int_0^4 r^3\,dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\theta)\big)\,d\theta \\
&= -\frac{15}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=4}\left(2\pi - \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right) \\
&= -960\pi.
\end{aligned}$$

3. $$\nabla f = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \nabla \times (\nabla f) &= \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Eftersom f är glatt gäller $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ och vi får $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$.