

Lösningar till udda induktionsbevisuppgifter för Fördjupningskurs i analys, 7,5hp (MA059G:44051)

1.33. Vi ska bevisa

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n 2k}_{VL_{(1)}^n} = \underbrace{n^2 + n}_{HL_{(1)}^n} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+). \quad (1)$$

(i) *Startsteg*: Låt $n = 1$. Vi har då:

$$VL_{(1)}^1 = \sum_{k=1}^1 2k = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$HL_{(1)}^1 = 1^2 + 1 = 2,$$

d.v.s. $VL_{(1)}^1 = 2 = HL_{(1)}^1$, så (1) stämmer i startsteget $n = 1$.

(ii) *Induktionssteg*: Antag att (1) stämmer för $n = p$, d.v.s. $VL_{(1)}^p = HL_{(1)}^p$ för alla $p \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller för $n = p + 1$:

$$\begin{aligned} VL_{(1)}^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} 2k = \sum_{k=1}^p 2k + \sum_{k=p+1}^{p+1} 2k \\ &= \sum_{k=1}^p 2k + 2(p+1) = VL_{(1)}^p + 2(p+1) \\ &= [\text{Enl. antagandet}] = HL_{(1)}^p + 2(p+1) \\ &= (p^2 + p) + 2(p+1) = p^2 + 3p + 2, \\ HL_{(1)}^{p+1} &= (p+1)^2 + (p+1) = p^2 + 2p + 1 + p + 1 \\ &= p^2 + 3p + 2, \end{aligned}$$

d.v.s. $VL_{(1)}^{p+1} = p^2 + 3p + 2 = HL_{(1)}^{p+1}$, så (1) stämmer även för $n = p + 1$; vi har visat induktionssteget.

Induktionsaxiomet: Vi har bekräftat startsteget och induktionssteget. Enligt induktionsaxiomet stämmer därför (1) för alla $n \in \mathbb{Z}_+$, och vi är klara. $\square$

1.35. a) Vi ska bevisa

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n k(k+1)}_{VL_{(2)}^n} = \underbrace{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}_{HL_{(2)}^n} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+). \quad (2)$$

(i) *Startsteg*: Låt $n = 1$. Vi har då:

$$VL_{(2)}^1 = \sum_{k=1}^1 k(k+1) = 1 \cdot (1+1) = 2,$$

$$HL_{(2)}^1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2,$$

d.v.s. $VL_{(2)}^1 = 2 = HL_{(2)}^1$, så (2) stämmer i startsteget $n = 1$.

(ii) *Induktionssteg*: Antag att (2) stämmer för $n = p$, d.v.s. $VL_{(2)}^p = HL_{(2)}^p$ för alla $p \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller för $n = p + 1$:

$$\begin{aligned}
VL_{(2)}^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^p k(k+1) + \sum_{k=p+1}^{p+1} k(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^p k(k+1) + (p+1)((p+1)+1) = VL_{(2)}^p + (p+1)(p+2) \\
&= [\text{Enl. antagandet}] = HL_{(2)}^p + (p+1)(p+2) \\
&= \frac{1}{3}p(p+1)(p+2) + (p+1)(p+2) = \frac{1}{3}(p(p+1)(p+2) + 3(p+1)(p+2)) \\
&= \frac{1}{3}(3+p)(p+1)(p+2) = \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3), \\
HL_{(2)}^{p+1} &= \frac{1}{3}(p+1)((p+1)+1)((p+1)+2) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3),
\end{aligned}$$

d.v.s. $VL_{(2)}^{p+1} = \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+3) = HL_{(2)}^{p+1}$, så (2) stämmer även för $n = p + 1$; vi har visat induktionssteget.

Induktionsaxiomet: Vi har bekräftat startsteget och induktionssteget. Enligt induktionsaxiomet stämmer därför (2) för alla $n \in \mathbb{Z}_+$, och vi är klara.

c) Vi ska bevisa

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n k(k+3)}_{VL_{(3)}^n} = \underbrace{\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)}_{HL_{(3)}^n} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+). \quad (3)$$

(i) *Startsteg*: Låt $n = 1$. Vi har då:

$$\begin{aligned}
VL_{(3)}^1 &= \sum_{k=1}^1 k(k+3) = 1 \cdot (1+3) = 4, \\
HL_{(3)}^1 &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+5) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4,
\end{aligned}$$

d.v.s. $VL_{(3)}^1 = 4 = HL_{(3)}^1$, så (3) stämmer i startsteget $n = 1$.

(ii) *Induktionssteg*: Antag att (3) stämmer för $n = p$, d.v.s. $VL_{(3)}^p = HL_{(3)}^p$ för alla $p \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller för $n = p + 1$:

$$\begin{aligned}
VL_{(3)}^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k(k+3) = \sum_{k=1}^p k(k+3) + \sum_{k=p+1}^{p+1} k(k+3) \\
&= \sum_{k=1}^p k(k+3) + (p+1)((p+1)+3) = VL_{(3)}^p + (p+1)(p+4) \\
&= [\text{Enl. antagandet}] = HL_{(3)}^p + (p+1)(p+4) \\
&= \frac{1}{3}p(p+1)(p+5) + (p+1)(p+4) = \frac{1}{3}(p(p+1)(p+5) + 3(p+1)(p+4)) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(p(p+5) + 3(p+4)) = \frac{1}{3}(p+1)(p^2 + 8p + 12), \\
HL_{(3)}^{p+1} &= \frac{1}{3}(p+1)((p+1)+1)((p+1)+5) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(p+6) = \frac{1}{3}(p+1)(p^2 + 8p + 12),
\end{aligned}$$

d.v.s. $VL_{(3)}^{p+1} = \frac{1}{3}(p+1)(p^2 + 8p + 12) = HL_{(3)}^{p+1}$, så (3) stämmer även för $n = p + 1$; vi har visat induktionssteget.

Induktionsaxiomet: Vi har bekräftat startsteget och induktionssteget. Enligt induktionsaxiomet stämmer därför (3) för alla $n \in \mathbb{Z}_+$, och vi är klara. $\square$

1.37. Vi betraktar påståendet

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}_{\text{VL}_{(4)}^n} = \underbrace{\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n + 2)}_{\text{HL}_{(4)}^n} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+); \quad (4)$$

är det sant för alla $n \in \mathbb{Z}_+$? Nej, ty för t.ex. $n = 1$ har vi

$$\begin{aligned} \text{VL}_{(4)}^1 &= \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1, \\ \text{HL}_{(4)}^1 &= \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1 + 2) = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

d.v.s. $\text{VL}_{(4)}^1 = 1 \neq \frac{4}{3} = \text{HL}_{(4)}^1$, vilket innebär att (4) ej stämmer.¹ $\square$

1.39. Vi ska bevisa

$$\underbrace{\sum_{k=n}^{2n} k(k+1)}_{\text{VL}_{(5)}^n} = \underbrace{\frac{1}{3}n(n+1)(7n+5)}_{\text{HL}_{(5)}^n} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+). \quad (5)$$

Vi skulle här kunna använda resultatet i uppgift **1.35 a)** eftersom

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{2n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \\ &= \text{VL}_{(2)}^{2n} - \text{VL}_{(2)}^{n-1} \\ &= [\text{Enl. uppgift 1.35 a)}] = \text{HL}_{(2)}^{2n} - \text{HL}_{(2)}^{n-1} \\ &= \frac{1}{3}2n(2n+1)(2n+2) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= [\text{En del räkning}] = \frac{1}{3}n(n+1)(7n+5) \end{aligned}$$

för alla heltal $n \geq 2$. (I fallet $n = 1$ är det förstås en enkel kontroll att bekräfta att (5) stämmer.) Men eftersom detta handlar om induktionsbevis så utför vi ett sådant istället/också.

(i) *Startsteg:* Låt $n = 1$. Vi har då:

$$\begin{aligned} \text{VL}_{(5)}^1 &= \sum_{k=1}^{2 \cdot 1} k(k+1) = \sum_{k=1}^2 k(k+1) = 1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) = 2 + 6 = 8, \\ \text{HL}_{(5)}^1 &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (7 \cdot 1 + 5) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8, \end{aligned}$$

d.v.s. $\text{VL}_{(5)}^1 = 8 = \text{HL}_{(5)}^1$, så (5) stämmer i startsteget $n = 1$.

(ii) *Induktionssteg:* Antag att (5) stämmer för $n = p$, d.v.s. $\text{VL}_{(5)}^p = \text{HL}_{(5)}^p$ för alla $p \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller för $n = p+1$ att vänsterledet blir:

$$\begin{aligned} \text{VL}_{(5)}^{p+1} &= \sum_{k=p+1}^{2(p+1)} k(k+1) = \sum_{k=p+1}^{2p+2} k(k+1) \\ &= \underbrace{\sum_{k=p}^{2p} k(k+1)}_{\text{VL}_{(5)}^p} - \sum_{k=p}^p k(k+1) + \sum_{k=2p+1}^{2p+2} k(k+1). \end{aligned}$$

¹Se uppgift **1.35 d)** för det korrekta värdet på summan, d.v.s. $\text{VL}_{(4)}^n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Använd antagandet:

$$\begin{aligned}
VL_{(5)}^{p+1} &= HL_{(5)}^p - \sum_{k=p}^p k(k+1) + \sum_{k=2p+1}^{2p+2} k(k+1) \\
&= \frac{1}{3}p(p+1)(7p+5) - p(p+1) + (2p+1)(2p+2) + (2p+2)(2p+3) \\
&= (p+1)\left(\frac{1}{3}p(7p+5) - p\right) + (2p+2)((2p+1) + (2p+3)) \\
&= (p+1)\frac{1}{3}(p(7p+5) - 3p) + (2p+2)(4p+4) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(7p^2 + 2p) + 8(p+1)(p+1) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)((7p^2 + 2p) + 3 \cdot 8(p+1)) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(7p^2 + 26p + 24).
\end{aligned}$$

För högerledet fås istället:

$$\begin{aligned}
HL_{(5)}^{p+1} &= \frac{1}{3}(p+1)((p+1)+1)(7(p+1)+5) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(p+2)(7p+12) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(7p^2 + 12p + 14p + 24) \\
&= \frac{1}{3}(p+1)(7p^2 + 26p + 24).
\end{aligned}$$

Vi ser alltså att $VL_{(5)}^{p+1} = \frac{1}{3}(p+1)(7p^2 + 26p + 24) = HL_{(5)}^{p+1}$, d.v.s. (5) stämmer även för $n = p + 1$; vi har visat induktionssteget.

Induktionsaxiomet: Vi har bekräftat startsteget och induktionssteget. Enligt induktionsaxiomet stämmer därför (5) för alla $n \in \mathbb{Z}_+$, och vi är klara. $\square$

1.41. Vi ska bevisa

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n k^2 \cdot k!}_{VL_{(6)}^n} < \underbrace{n \cdot (n+1)!}_{HL_{(6)}^n} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+). \quad (6)$$

(i) *Startsteg:* Låt $n = 1$. Vi har då:

$$\begin{aligned}
VL_{(6)}^1 &= \sum_{k=1}^1 k^2 \cdot k! = 1^2 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1, \\
HL_{(6)}^1 &= 1 \cdot (1+1)! = 1 \cdot 2! = 1 \cdot (1 \cdot 2) = 1 \cdot 2 = 2,
\end{aligned}$$

d.v.s. $VL_{(6)}^1 = 1 < 2 = HL_{(6)}^1$, så (6) stämmer i startsteget $n = 1$.

(ii) *Induktionssteg:* Antag att (6) stämmer för $n = p$, d.v.s. $VL_{(6)}^p < HL_{(6)}^p$ för alla $p \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller för $n = p + 1$ att vänsterledet blir:

$$\begin{aligned}
VL_{(6)}^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k^2 \cdot k! = \sum_{k=1}^p k^2 \cdot k! + \sum_{k=p+1}^{p+1} k^2 \cdot k! \\
&= VL_{(6)}^p + (p+1)^2 \cdot (p+1)! \quad [\text{Använd antagandet}] \\
&< HL_{(6)}^p + (p+1)^2 \cdot (p+1)! = p \cdot (p+1)! + (p+1)^2 \cdot (p+1)! \\
&= (p + (p+1)^2) \cdot (p+1)! = (p + (p^2 + 2p + 1)) \cdot (p+1)! \\
&= (p^2 + 3p + 1) \cdot (p+1)!
\end{aligned}$$

För högerledet fås istället:

$$\begin{aligned}\mathrm{HL}_{(6)}^{p+1} &= (p+1) \cdot ((p+1)+1)! = (p+1) \cdot (p+2)! \\ &= (p+1) \cdot ((p+2) \cdot (p+1)!) = (p+1)(p+2) \cdot (p+1)! \\ &= (p^2 + 2p + p + 2) \cdot (p+1)! = (p^2 + 3p + 2) \cdot (p+1)!.\end{aligned}$$

Vi ser alltså att

$$\mathrm{VL}_{(5)}^{p+1} < (p^2 + 3p + 1) \cdot (p+1)! < (p^2 + 3p + 2) \cdot (p+1)! = \mathrm{HL}_{(5)}^{p+1},$$

så att

$$\mathrm{VL}_{(5)}^{p+1} < \mathrm{HL}_{(5)}^{p+1},$$

d.v.s. (6) stämmer även för $n = p + 1$; vi har visat induktionssteget.

Induktionsaxiomet: Vi har bekräftat startsteget och induktionssteget. Enligt induktionsaxiomet stämmer därför (6) för alla $n \in \mathbb{Z}_+$, och vi är klara. $\square$