FÖRELÄSNING 1

Vad är analys? Analys är den matematiska teori där man studerar objekt (i konkret eller abstrakt mening) som inte nödvändigtvis är uppbyggda av räta linjer och trianglar. T.ex. kan man i analys studera kurvor, cirklar, parablar, hyperblar, ellipser, klot etc. Det gäller dock att dessa icke-rätlinjiga objekt kan uppfattas som rätlinjiga objekt i gränsen då man har oändligt många oändligt små sådana.

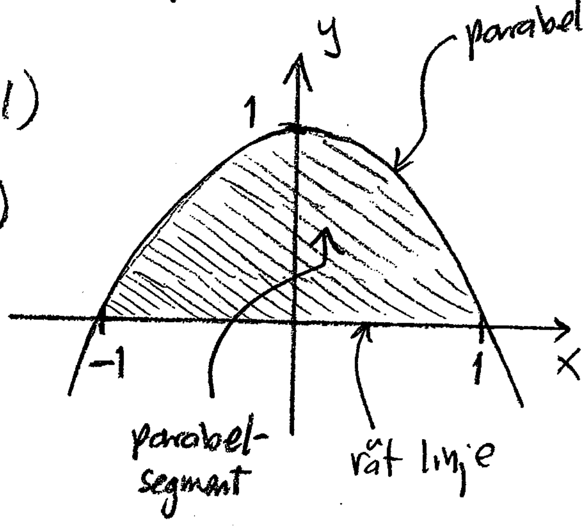
Första kända analysproblemet: (Archimedes, c:a 225 f.Kr)

Vilken area har ett parabelsegment?

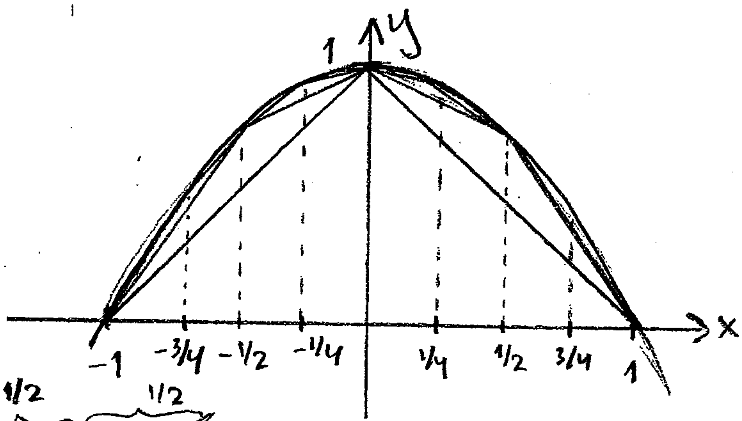
Parabel = andragradskurva, t.ex. $y = 1 - x^2$

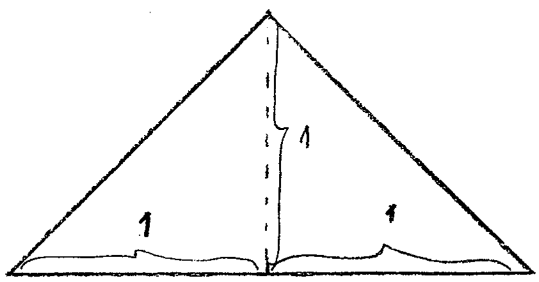
Parabelsegment = ytan mellan parabelkurvan och en rät linje

T.ex. $\begin{cases} y = 1 - x^2 & \text{(parabel)} \\ y = 0 & \text{(rät linje)} \end{cases}$



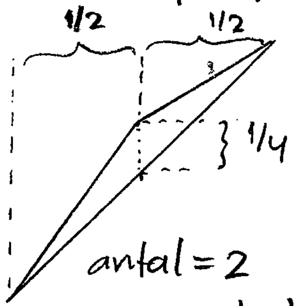
Med Archimedes metod att approximera segmentet som en serie trianglar kan man visa att arean i figuren ovan är 4/3.





antal = 1
area = 1 } ⇒ area = 1

⇒ tot. area = 1



antal = 2
area = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ } ⇒ area = $\frac{1}{4}$

tot. area = $1 + \frac{1}{4}$

O.S.V.

Geometrisk serie: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

Archimedes uppfann alltså en slags integrationsmetod, om än omständlig i dagens ögon.

På liknande sätt lyckades Archimedes räkna ut arean hos en cirkel, $A = \pi r^2$, se avsnitt 1.1 i boken.

Medelhastighet och momentan hastighet:

Antag att ett tåg accelererar från stillastående så att sträckan blir

$$y = \frac{1}{4} t^2 \quad \text{meter}$$

efter t sekunder där $t \in [0, 100]$.

Frågor: (1) Medelhastighet första minuten?

(2) Momentan hastighet en minut efter starten?

Svar: (1) $$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(60) - y(0)}{60 - 0} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} 60^2 - \frac{1}{4} 0^2}{60} = 15 \text{ m/s}$$

$$(= 54 \text{ km/h})$$

(2) Betrakta tidsintervallet $[60, 60+h]$. Medelhastighet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(60+h)-y(60)}{(60+h)-60} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(60+h)^2 - \frac{1}{4}60^2}{h} =$$

$$= \frac{1}{4h}\left(3600+120h+h^2-3600\right) =$$

$$= 30 + \frac{1}{4}h$$

Momentan hastighet: Krymp tidsintervallet!

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{h\to 0} \left(30+\frac{1}{4}h\right) = 30 \text{ m/s}$$

$$(= 108 \text{ km/h})$$

I exemplen ovan har vi alltså dels beräknat arean hos en andragradskurva och dels beräknat den momentana hastigheten hos ett föremål i rörelse. Dessa är exempel på integration resp. derivering. Denna kurs är en fördjupning i dessa matematiska begrepp sprungna ur studiet av gränsvärden.

Gränsvärden hos funktioner

I exemplen har vi väsentligen använt följande intuitiva definition av gränsvärden hos funktioner:

Definition: (Intuitiv) Antag $f(x)$ definierad nära punkten a utom möjligen i a själv och att vi kan föra $f(x)$ godtyckligt nära L genom att välja x tillräckligt nära a (men $x \neq a$).
Då säger vi att

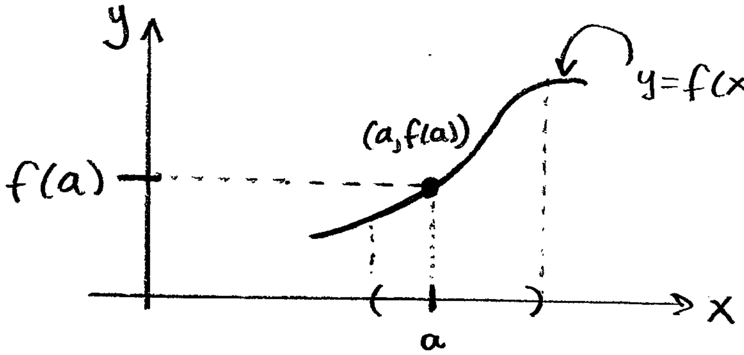
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Exempel: $\lim_{x \to a} x = a$, $\lim_{x \to a} b = b$

(Triviala gränsvärden, se satsen.)

I dessa exempel är $f(a)$ definierat.

Se figuren:



Vad händer om $f(x)$ ej definierad i a?

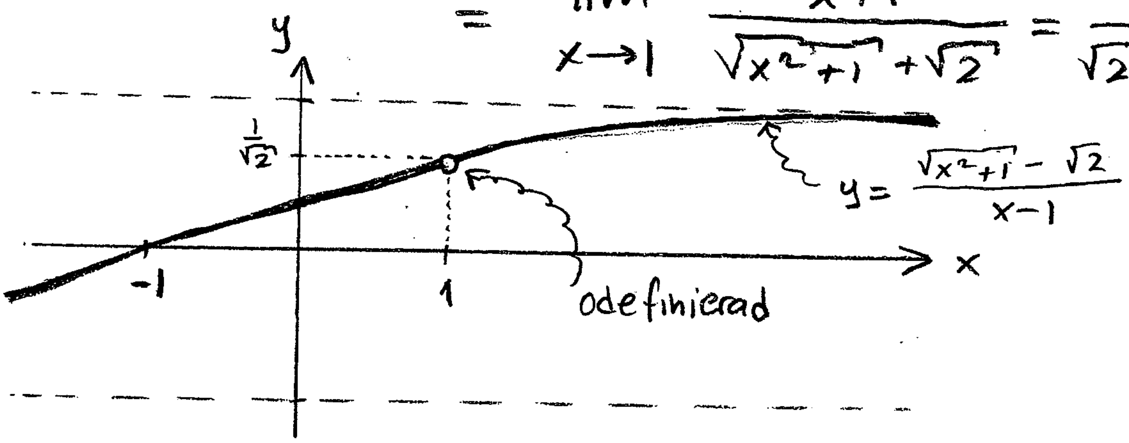
Exempel: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} =$$

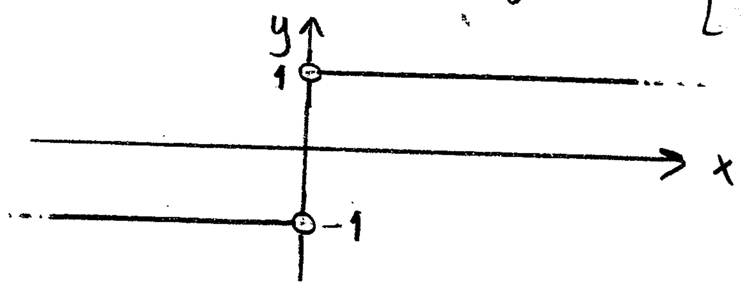
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Teckenfunktionen: Låt $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & , x>0 \\ -1 & , x<0 \end{cases}$.



Vi ser att $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ saknas.

Däremot ser vi att man kan närma sig $x=0$ antingen från vänster eller från höger så att $\operatorname{sgn} x$ "närmar sig" -1 resp. 1.

Definition: Antag $f(x)$ definierad på
(Intuitiv)
(b,a) och att vi kan föra $f(x)$ godtyckligt nära L genom att välja $x<a$ tillräckligt nära a, då säger vi att

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L,$$

L är vänstergränsvärdet till f i a.

På samma sätt kan man definiera högergränsvärdet:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

Vi närmar oss då a från höger på ett intervall (a,b).

Exempel: $\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$

Sats: $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x) = L = \lim_{x\to a+} f(x)$

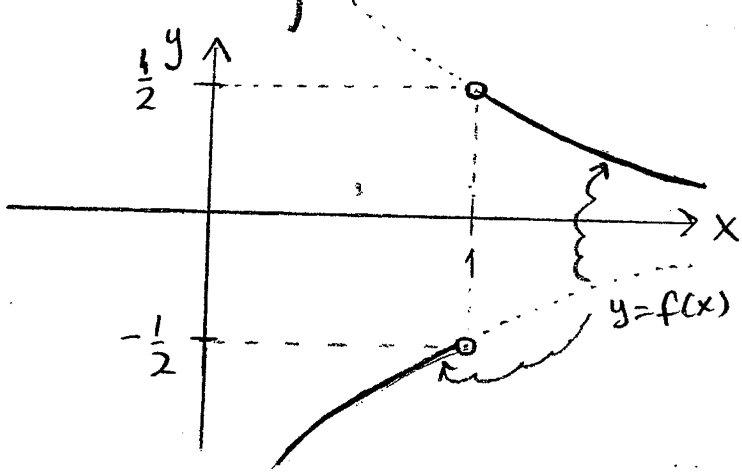
Satsen säger att gränsvärdet är L omm vänster- och högergränsvärdena båda är L.

Exempel: $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1-} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ kan ej existera.



Sats: Gränsvärden följer de "vanliga" räknereglerna för summa, differens, produkt, kvot, potens och olikhet.

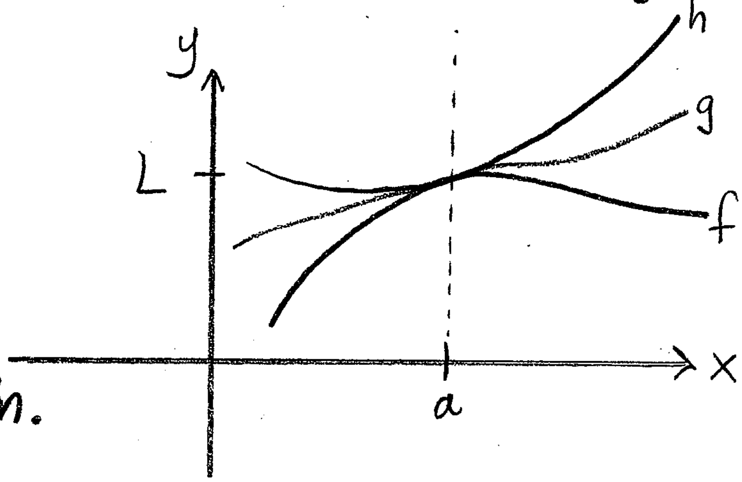
Exempel: $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-2}+x^2}{x+1} = \frac{\sqrt{3\cdot 2-2}+2^2}{2+1} = 2$$

<u>Instängningssatsen:</u> Antag $f(x) \le g(x) \le h(x)$ för alla x i ett öppet intervall som innehåller a och att

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Då gäller $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

(Samma resultat för vänster- och höger-gränsvärden.)



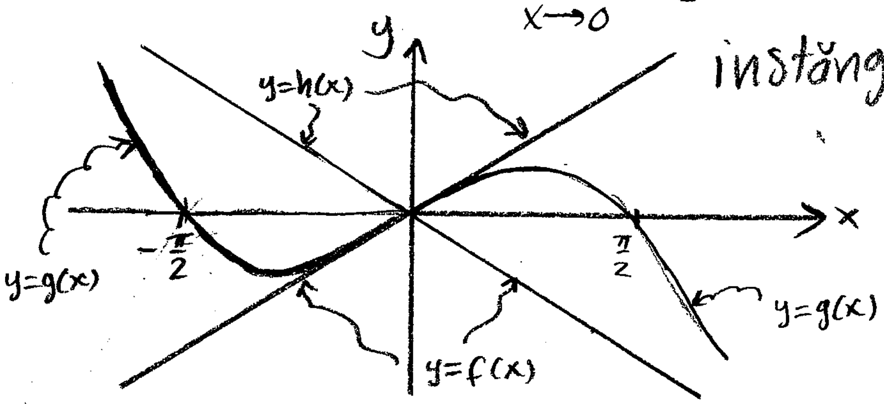
g "stängs in" av h ovanifrån och av f underifrån.

<u>Exempel:</u> $f(x) = -|x|$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$h(x) = |x|$, $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$

$g(x) = x\cos x$, $f(x) \le g(x) \le h(x)$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ p.g.a. instängningssatsen



Gränsvärden i oändligheten och oändliga gränsvärden

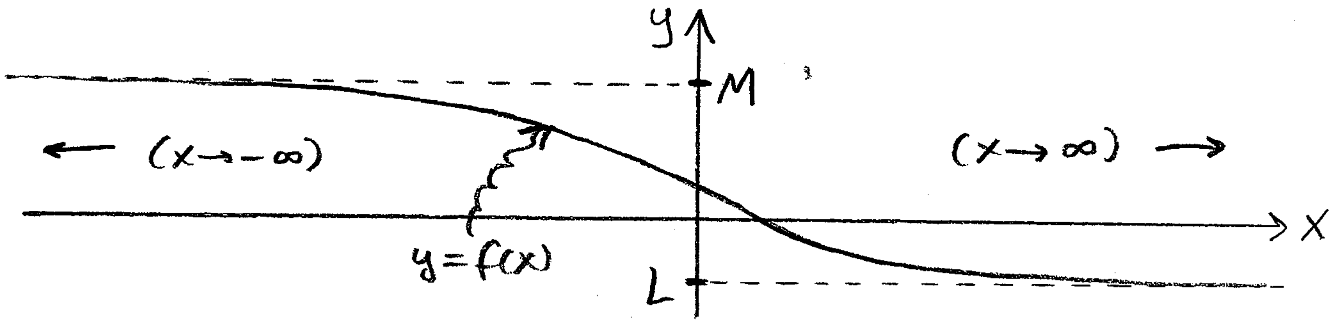
Gränsvärden i oändligheten: Hur uppför $f(x)$ sig då x går mot oändligheten?

Definition: (Intuitiv) Antag $f(x)$ definierad på (a, ∞) och att vi kan föra $f(x)$ godtyckligt nära L genom att välja x tillräckligt stort. Då säger vi att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

På samma sätt för att definiera

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$



Samma satser gäller gränsvärden i oändligheten som hos gränsvärden i a.

Exempel: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1}$

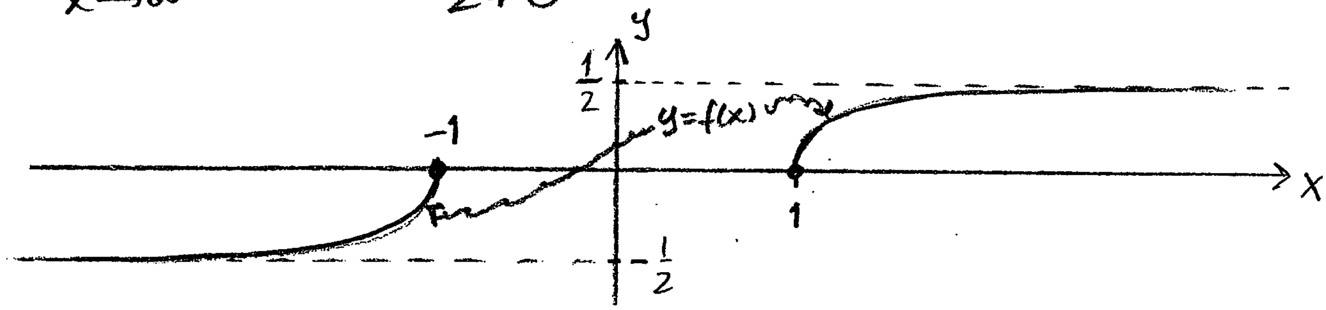
Hitta $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ och $\lim_{x \to \infty} f(x)$!

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-1/x^2}}{x(2+1/x)} =$$

$$= \frac{|x|\sqrt{1-1/x^2}}{x(2+1/x)} = (\operatorname{sgn} x)\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{1-0}}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1-0}}{2+0} = \frac{1}{2}$$



<u>Rationella funktioner:</u> $f(x)$ är rationell om

$$f(x) = \frac{\text{polynom av grad } m}{\text{polynom av grad } n}$$

<u>Exempel:</u> $f(x) = \dfrac{5x^3-11x^2+3x+2}{6x^3+4x^2-7}$

$(m=n=3)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3(5-11/x+3/x^2+2/x^3)}{x^3(6+4/x-7/x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-11/x+3/x^2+2/x^3}{6+4/x-7/x^3} =$$

$$= \frac{5-0+0+0}{6+0-0} = \frac{5}{6}$$

Om $m<n$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

Om $m>n$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ existerar ej.

Ibland fås typen $\infty-\infty$.

<u>Exempel:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}+2x\right)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3x+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-3x+1}-2x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(4x^2-3x+1)-4x^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}-2x}=$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x^2}=2|x|=\\ \quad =2(-x)\\ \text{om } x<0\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{2(-x)\sqrt{1-3/4x+1/4x^2}-2x}=$$

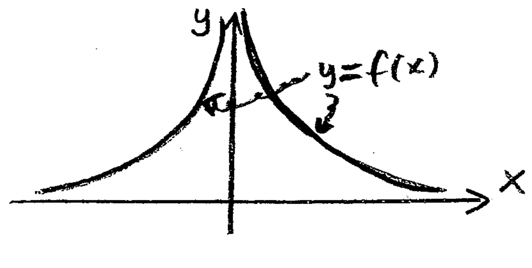
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1/x-3}{-2\sqrt{1-3/4x+1/4x^2}-2}=$$

$$=\frac{0-3}{-2\sqrt{1-0+0}-2}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

<u>Oändliga gränsvärden:</u> En funktion $f(x)$ som växer obegränsat sägs något oegentligt ha ett oändligt gränsvärde. Detta är inget riktigt gräns<u>värde</u> eftersom oändligheten inte är ett tal<u>värde</u>.

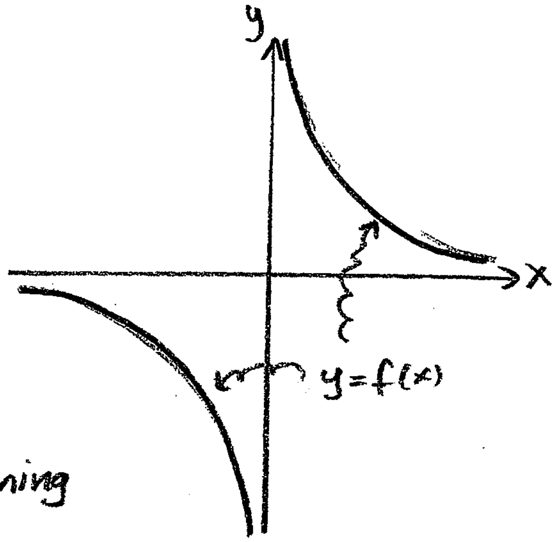
<u>Exempel:</u> $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

(Tvåsidigt) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\infty$



Exempel: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(Ensidigt)



$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ saknar mening

Exempel: $f(x) = -7x^5 + 2x^4$

$(x \to \pm\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -7x^5\left(1 - \frac{2}{7x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} -7x^5\left(1 - \frac{2}{7x}\right) = -\infty$$

Exempel: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{3 - x} =$

$(x \to \pm\infty,$ rationell fkn)

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 2 - 1/x}{3/x - 1} =$$

$$= \frac{\left(\lim_{x \to -\infty} x\right) + 2 - 0}{0 - 1} =$$

$$= -\left(\left(\lim_{x \to -\infty} x\right) + 2\right) = \infty$$