FÖRELÄSNING 10

Konvergenstest för positiva serier

Vi tittar nu på serier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, s.k. positiva serier. (Alla resultat gäller även slutligen positiva serier, d.v.s. $a_n \geq 0$ $\forall n \geq N$ f.n. $N > 0$.)

Integralkriteriet: Man kan jämföra positiva serier med generaliserade integraler av första typen.

Sats: Antag $a_n = f(n)$ f.n. funktion f som är positiv, kontinuerlig och ickeväxande på $[N, \infty)$ f.n. $N \in \mathbb{Z}_+$. Då gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ båda antingen konvergerar eller divergerar mot ∞.

Bevis: Det är klart att serien och integralen antingen konvergerar eller divergerar mot ∞. Vi ska visa att detta sker simultant, d.v.s. att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x)\,dx \text{ konv.}$$

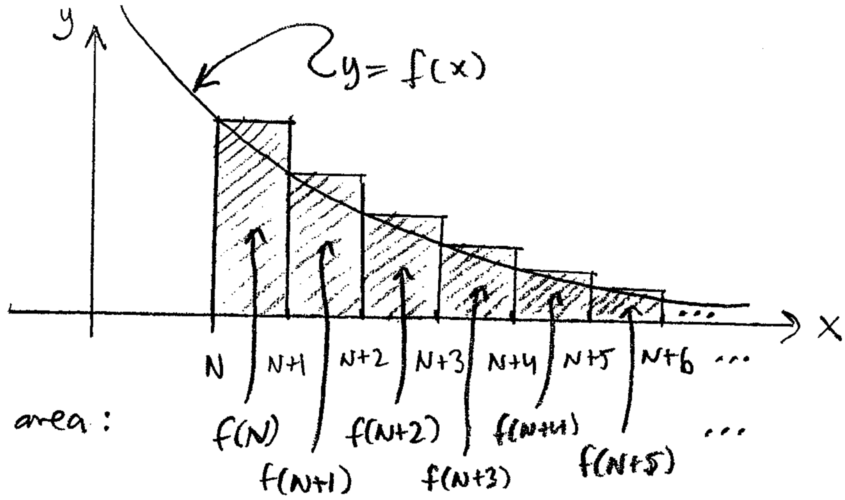
$\Rightarrow$: Antag $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar mot s. Då har vi

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx \leq f(N) + f(N+1) + f(N+2) + \ldots \qquad (*)$$
$$= [f(n) = a_n] = s - s_{N-1}$$

där $s_{N-1} = \sum_{j=1}^{N-1} a_j$. Men $s - s_{N-1} < \infty$

$\Longrightarrow \int_N^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ så den är konvergent.

Motivering till (*):



$\Leftarrow$: Antag $\int_N^\infty f(x)\,dx$ konvergerar mot $I<\infty$. Vi har för alla $n>N$ att

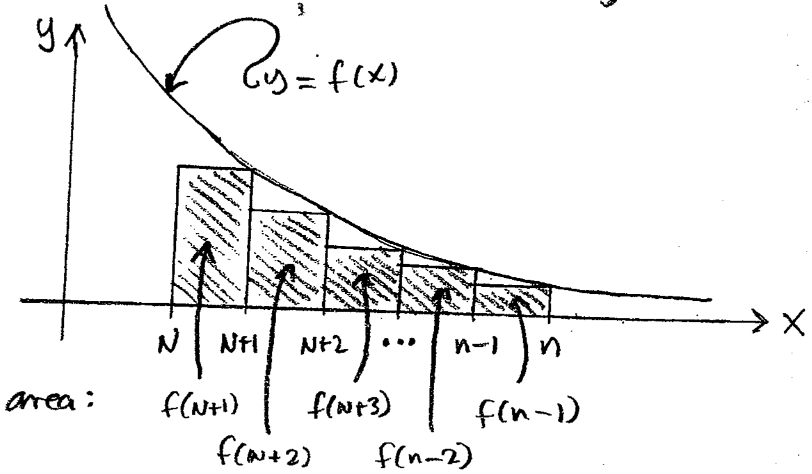
$$S_n = S_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_n =$$

$$= S_N + f(N+1) + f(N+2) + \dots + f(n) \leq [\text{se fig.}]$$

$$\leq S_N + \int_N^{n-1} f(x)\,dx \leq S_N + \int_N^\infty f(x)\,dx = S_N + I$$

$\Longrightarrow$ $\{S_N\}$ är uppåt begränsad $\quad (**)$

Eftersom $\{S_N\}$ är växande så ger övre begränsningen $(**)$ att serien konvergerar. $\square$



P-serier: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ kallas för en p-serie.

Påstående: p-serien konvergerar om $p>1$ och divergerar mot ∞ om $p \leq 1$.

Bevis: • Antag $p > 0$. Bilda $f(x) = x^{-p}$. Då är f positiv, kontinuerlig och avtagande på $[N, \infty)$ $\forall N \in \mathbb{Z}_+$; fixera t.ex. $N = 1$. Enligt satsen om p-integraler tillsammans med integralkriteriet så fås konvergens för p-serien om $p > 1$ och divergens mot ∞ om $0 < p \leq 1$.

• Antag $p \leq 0$. Då gäller för $a_n = n^{-p}$ att $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ så man får divergens. Eftersom serien är positiv så fås divergens mot ∞. $\square$

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$ konvergerar.

Lösning: Bilda $f(x) = \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}$. f uppfyller villkoren för integralkriteriet. Välj $N = 1$. Serien konvergerar om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerar:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(\ln(x+1))^2} =$$

$$= \left[\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ du = \frac{dx}{x+1} \end{cases}, \begin{cases} x = \infty \Rightarrow u = \infty \\ x = 1 \Rightarrow u = \ln 2 \end{cases} \right] =$$

$$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \int_{\ln 2}^{\infty} u^{-2}\,du = \lim_{R \to \infty} \int_{\ln 2}^{R} u^{-2}\,du =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \left(-u^{-1}\right)_{\ln 2}^{R} = \lim_{R \to \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{R}\right) = \ln 2 < \infty,$$

så serien är konvergent.

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{n}}$ divergerar mot ∞.

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3}{n}} = \sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$, en p-serie

med $p = \frac{1}{2} < 1$, så den divergerar mot ∞.

Jämförelsekriterier:

Sats: Låt $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ vara talföljder sådana att det existerar en konstant $K > 0$ så att det slutligen gäller att $0 \leq a_n \leq K b_n$.

(a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar så konvergerar också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞ så divergerar också $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mot ∞.

Bevis: Det finns $N > 0$ så att $0 \leq a_n \leq K b_n$ $\forall n > N$.
Eftersom det är svansen hos talföljder som avgör konvergens så antar vi $0 \leq a_n \leq K b_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.
(Om inte så gör en indexsubstitution.)

Låt $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ och
$s_n' = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

Då måste gälla $s_n \leq K s_n'$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

(a) Antag $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar $\Rightarrow \{s_n'\}$ konvergent
$\Longrightarrow \{s_n'\}$ är uppåt begränsad

$\Rightarrow \{s_n\}$ är också uppåt begränsad

$\Rightarrow \{s_n\}$, och därmed $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, är konvergent.

(b) Följer direkt ur (a) ty om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞ så kan inte $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vara konvergent enligt (a), den måste divergera mot ∞. $\square$

<u>Exempel:</u> Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n-1}{5n^4+2}$ konvergerar.

<u>Lösning:</u> Vi har serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n = \frac{n^2+2n-1}{5n^4+2}$.

Vi har för alla $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$0 \leq a_n = \frac{n^2+2n-1}{5n^4+2} < \frac{n^2+2n}{5n^4+2} < \frac{n^2+2n}{5n^4} = \frac{n+2}{5n^3} \underset{[n\geq 1]}{\leq}$$

$$\leq \frac{n+2n}{5n^3} = \frac{3n}{5n^3} = \frac{3}{5}\frac{1}{n^2}$$

Låt $b_n = \frac{1}{n^2}$, $K = \frac{3}{5}$. Då har vi

$0 \leq a_n \leq K b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Vi vet sedan förut att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerar. Enligt jämförelsekriteriet så konvergerar då också serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n-1}{5n^4+2}$

Nedan har vi ett jämförelsekriterium som involverar ett gränsvärde:

<u>Sats:</u> Antag att $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är positiva talföljder sådana att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \qquad (*)$$

där det antingen gäller att $L \geq 0$ eller $L = +\infty$.
Då gäller:

(a) Om $L < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar så konvergerar också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Om $L > 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞ så divergerar också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mot ∞.

<u>Bevis:</u> (a) Antag $L < \infty$. Om n tillräckligt stort så har vi $b_n > 0$ och $0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L+1$ p.g.a. (*).

$\Longrightarrow 0 \leq a_n \leq (L+1) b_n$ där $L+1 \geq 1 > 0$

Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar så gäller enligt jämförelsekriteriet (a) att också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar.

(b) Antag $L > 0$. Om n tillräckligt stort så har vi $\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{L}{2}$ p.g.a. (*).

$$\Longrightarrow 0 < b_n \leq \frac{2}{L} a_n, \quad \frac{2}{L} > 0$$

Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞ så gäller enligt jämförelsekriteriet (b) att också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞. $\square$

Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform är ofta mer praktiskt än det förstnämnda jämförelsekriteriet. Det gäller dock att gränsvärdet måste existera för att kunna användas.

<u>Exempel:</u> Konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{2n^3-4n^2+5}$?

<u>Lösning:</u> $a_n = \frac{3n+7}{2n^3-4n^2+5}$, ger att serien är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

För stora n uppför sig a_n som $n/n^3 = 1/n^2$.
Låt oss därför jämföra med p-serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, där $b_n = \frac{1}{n^2}$, som vi vet konvergerar.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+7}{2n^3-4n^2+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+7n^2}{2n^3-4n^2+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+7/n}{2-4/n+5/n^3} = \frac{3+0}{2-0+0} = \frac{3}{2} < \infty$$

Eftersom $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är positiva serier så ger jämförelsekriteriet på gränsvärdesform (a) att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{2n^3-4n^2+5} \text{ konvergerar.}$$

<u>Kvot- och rotkriterierna:</u>

De s.k. kvot- och rotkriterierna kräver ingen jämförelse med andra serier eller integraler.

<u>Sats:</u> (Kvotkriteriet) Antag $a_n > 0$ (slutligen) och

att $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existerar eller är $+\infty$.

Då gäller:

(a) Om $0 \le \rho < 1$ så konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Om $1 < \rho \le \infty$ så $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞.

(c) Om $\rho = 1$ så säger detta inget om konvergensen hos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bevis: (a) Antag $0 \le \rho < 1$. Låt r vara sådan att $\rho < r < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le r \text{ för alla } n \ge N$$

för något $N > 0$. Alltså, $a_{n+1} \le r a_n \ \forall n \ge N$.

$$\Rightarrow a_{N+k} \le r a_{N+k-1} \le r^2 a_{N+k-1} \le \dots \le r^k a_N$$

för alla $k \geq 0$

$$\underset{(k=n-N)}{\Rightarrow} a_n \le r^{n-N} a_N \quad \forall n \geq N$$

Den geometriska serien $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-N}$ konvergerar så då måste även $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergera, vilket innebär att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar.

(b) Antag $\rho > 1$. Låt r vara sådan att $1 < r < \rho$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r \text{ för alla } n \geq N$$

för något $N > 0$ s.a. $a_N > 0$.

På liknande sätt som i (a) fås då

$$a_n \geq r^{n-N} a_N \quad \forall n \geq N \qquad (*)$$

$$r > 1 \underset{(*)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerar}$$

mot ∞.

(c) • Betrakta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som divergerar mot ∞.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{1+0} = 1$$

• Betrakta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som konvergerar

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2 = 1$$

I båda fallen $\rho = 1$ men divergens mot ∞ resp. konvergens. Tydligen ger inte $\rho = 1$ någon information. $\square$

<u>Exempel:</u> Testa om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$ är konvergent.

<u>Lösning:</u> Vi använder kvotkriteriet.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4/4^{n+1}}{n^4/4^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 =$$

$$= \frac{1}{4}(1+0)^4 = \frac{1}{4} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n} \text{ konvergerar enligt kvotkriteriet (a).}$$

—— Ett mindre använt konvergenstest:

Sats: (Rotkriteriet) Antag att $a_n > 0$ (slutligen) och att $\sigma = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ existerar eller är $+\infty$.
Då gäller:

(a) Om $0 \le \sigma < 1$ så konvergerar $\sum_{n=1} a_n$.

(b) Om $1 < \sigma \le \infty$ så $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞.

(c) Om $\sigma = 1$ så säger detta inget om konvergens hos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Absolut och betingad konvergens

Hittills har vi arbetat med slutligen positiva serier.
Låt oss släppa detta krav.

Definition: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sägs vara absolut-konvergent om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar

Sats: Om en serie är absolutkonvergent så är den konvergent.

Bevis: Antag $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är absolutkonvergent.
Låt $b_n = a_n + |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$.
Eftersom $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ så måste

$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \Leftrightarrow 0 \leq b_n \leq 2|a_n| \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar p.g.a. jämförelse-kriteriet.

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar. $\square$

Definition: Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent men inte absolutkonvergent så säger vi att den är betingat konvergent eller att den konvergerar betingat.

Exempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, d.v.s. den alternerande harmoniska serien, är betingat konvergent. Konvergens visas i nästa sats och att den inte är absolutkonvergent inses p.g.a. att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, den harmoniska serien, är en divergent (p-)serie.

För alternerande serier av typen ovan har vi följande sats (alternerande serie-kriteriet, även kallad Leibniz' sats):

Sats: Antag att $\{a_n\}$ är en talföljd vars termer uppfyller, för något $N \in \mathbb{Z}_+$, följande tre villkor:

(i) $a_n a_{n+1} < 0 \quad \forall n \geq N,$

(ii) $|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \forall n \geq N,$ och

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

(D.v.s. alternerande, avtagande i storlek resp. talföljden har gränsvärdet noll.)

Då konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

Exempel: Testa om serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(\ln n)^2}$ konvergerar absolut eller betingat.

Lösning: $a_n = \frac{\cos n\pi}{(\ln n)^2} = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{(\ln n)^2}$

Vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$ divergerar mot ∞

så serien är inte absolutkonvergent.

Däremot så gäller ;

(i) $a_n a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^2} = -\frac{1}{((\ln n)(\ln(n+1)))^2} < 0$

(ii) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1/(\ln(n+1))^2}{1/(\ln n)^2} = \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^2 < 1$

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} = 0$

Vi kan därför använda alternerande serie-kriteriet : serien konvergerar.

Eftersom serien konvergerar men inte absolut-konvergerar så konvergerar den betingat

Omordning av termerna i en serie:

För en summa med ändligt antal termer spelar ordningen ingen roll: $a+b+c = (a+b)+c = b+(a+c)$ o.s.v. För oändliga serier är inte detta självklart.

Exempel: Vi vet att den alternerande harmoniska serien $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ konvergerar (betingat). Låt oss omordna termerna naivt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots \overset{\text{om-ordna}}{=} \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right) -$$
$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} \qquad (*)$$

Både $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ och $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ divergerar mot ∞ så den naiva omordningen $(*)$ säger bara $\infty-\infty$ vilket inte ger ett konvergent resultat.

Oändliga serier kan alltså vara beroende på i vilken ordning vi adderar termerna!

Sats: (a) Om en absolutkonvergent series termer omordnas så får man fortfarande samma summa som resultat

(b) Om en serie är betingat konvergent så kan man omordna termerna så att summan kan få vilket önskat värde som helst, eller divergera mot $-\infty$ eller ∞ eller divergera.