FÖRELÄSNING 11

Potensserier

En potensserie är ett polynom av oändlig grad:

Definition: En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

kallas för en potensserie i c. Konstanterna $a_0, a_1, a_2, \ldots$ kallas potensseriens koefficienter.

Seriens konvergens beror på x.

Exempel: Geometrisk serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

Vi vet att den konvergerar omm $|x| < 1$, och då fås $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($a=1$, $r=x$ och $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$)

Vi ser att funktionen $\frac{1}{1-x}$ ges som summan $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ i specialfallet $|x|<1$. Om $|x|>1$ fungerar inte serien som representation av funktionen.

Punkten c kallas potensseriens konvergenscentrum eftersom en potensserie alltid konvergerar för $x=c$.

Sats: För en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ måste precis ett av följande alternativ gälla:

(i) Serien konvergerar endast i $x=c$.

(ii) Serien konvergerar för alla reella x.

(iii) Det existerar ett $R>0$ sådant att serien konvergerar om $|x-c|<R$ men divergerar om $|x-c|>R$. För $x=c\pm R$ kan serien konvergera eller divergera.

Dessutom är konvergensen absolut utom möjligen för $x=c\pm R$ i fall (iii).

Mängden av punkter där potensserien konvergerar kallas <u>konvergenscirkeln</u> och är ett intervall centrerat i c. Radien R i (iii) kallas <u>konvergensradien</u>. (I (i) och (ii) har vi $R=0$ resp. $R=\infty$.)

<u>Sats:</u> Antag att vi har en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

Om $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, där $0\le L\le\infty$, så har potensserien konvergensradien $R=1/L$ om $0<L<\infty$, $R=0$ om $L=\infty$ och $R=\infty$ om $L=0$.

<u>Bevis:</u> $$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = L|x-c|,\quad L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

$\rho<1 \Rightarrow$ absolutkonvergens, $\rho>1\Rightarrow$ divergens

$$\begin{cases} L=0 \Rightarrow \rho<1 \quad \forall x \Rightarrow R=\infty \\ L=\infty \Rightarrow \rho=\infty \quad \forall x\neq c \Rightarrow R=0 \\ 0<L<\infty \Rightarrow \rho<1 \quad \forall x: \underset{[\rho=L|x-c|<L\cdot 1/L=1]}{|x-c|<1/L} \Rightarrow R=1/L \end{cases}$$ $\square$

Exempel: Bestäm konvergenscentrum, -radie och -cirkel för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{(n^3+5)4^n}$.

Lösning:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{(n^3+5)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x-(-2/3))^n}{4^n(n^3+5)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{n^3+5}}_{=a_n} (x-(\underbrace{-\tfrac{2}{3}}_{=c}))^n$$

Så att konvergenscentrum är $\boxed{c=-2/3}$.
Konvergensradien ges av
$$\frac{1}{R} = L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^3+5}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{n^3+5}}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{4}\cdot\frac{n^3+5}{(n+1)^3+5}\right| = \frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1+5/n^3}{(1+1/n)^3+5/n^3} =$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1+0}{(1+0)^3+0} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{R=\frac{4}{3}}$$

Vi vet att vi har absolut konvergens för
$$x \in (c-R, c+R) = \left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right) = \left(-2, \frac{2}{3}\right)$$
och att vi har divergens för $x<-2$ och $x>\frac{2}{3}$.
Återstår att undersöka vad som händer för $x=-2, \frac{2}{3}$.

$x=-2$: Potensserien är $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3\cdot(-2)+2)^n}{(n^3+5)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+5}$

som vi vet konvergerar (absolut).

$x=\frac{2}{3}$: Potensserien är $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3\cdot\frac{2}{3}+2)^n}{(n^3+5)4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3+5}$

som vi vet konvergerar (absolut).

Alltså måste konvergenscirkeln vara det slutna intervallet $[-2, \frac{2}{3}]$.

Algebraiska operationer på potensserier:

När det gäller multiplikation av en potensserie med en konstant och summan av två potensserier har vi följande sats:

Sats: Låt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ ha konvergensradierna R_a resp. R_b och låt k vara en konstant. Då gäller

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (ka_n)(x-c)^n$ har konvergensradien R_a och

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ka_n)(x-c)^n = k\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-c)^n$ har konvergensradien $\min\{R_a, R_b\}$

och $$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$$

(Likheterna gäller där potensserierna i högerleden konvergerar.)

Dessutom, under samma förutsättningar som i satsen ovan, att om $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ så har vi att

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$$

där den s.k. Cauchyprodukten $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n$ har konvergensradien $\min\{R_a, R_b\}$.

Exempel: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ där

$c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2}\frac{1}{(n-j)!}$. Konvergensradierna är

$R_1 = 1$ resp. $R_2 = \infty$ så Cauchyproduktens

konvergensradie måste vara $\min\{1, \infty\} = 1$.

Derivering och integration av potensserier:

Vi följande sats:

Sats: Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ konvergerar mot $f(x)$ på konvergenscirkeln $(c-R, c+R)$, $R>0$, d.v.s.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \forall x \in (c-R, c+R)$$

så är f deriverbar på $(c-R, c+R)$ och

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \quad \forall x \in (c-R, c+R)$$

och integrerbar på varje slutet delintervall av konvergenscirkeln så att

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \quad \forall x \in (c-R, c+R)$$

Det viktiga i satsen är att konvergensradien förblir oförändrad efter derivering eller integration av potensserien.

Abels sats: Potensserier är kontinuerliga på sina konvergenscirklar.

Exempel: Bestäm potensserierepresentationen för funktionen $f(x) = \ln(1+x)$ samt konvergenscirkeln.

Lösning: Vi noterar att

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{d}{dt} \ln(1+t)\, dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

Vi kan skriva $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)}$ som geometrisk serie enligt

$$\frac{1}{1-(-t)} = 1 + (-t) + (-t)^2 + (-t)^3 + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \quad (*)$$

som vi vet är giltig för $|-t| < 1 \Leftrightarrow -1 < t < 1$. (absolut konvergens)
Vi får då

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right) \Big|_0^x =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

som konvergerar absolut för $-1 < x < 1$, d.v.s. $R = 1$ som för $(*)$ enligt satsen.

Vad händer i $x = -1$ och $x = 1$?

$x = -1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$

———— divergens mot $-\infty$

$x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}$

———— konvergens (betingad)

Konvergenscirkeln är $(-1, 1]$.

Taylor- och Maclaurinserier

Varje potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ definierar funktion $f(x)$ på $(c-R, c+R)$ om konvergensradien R är positiv; vi säger att det är en <u>representation</u> av f.

<u>Sats:</u> Antag $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ och att potensserien konvergerar mot $f(x)$ för alla $x \in (c-R, c+R)$, $R>0$. Då ges koefficienterna av

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(Notera: $f^{(k)}$ är k:te derivatan, t.ex. $f^{(2)} = f''$.)

<u>Bevis:</u> Följer direkt av satsen om derivering och integration av potensserier. $\square$

<u>Definition:</u> Om $f(x)$ har derivator av alla ordningar i $x=c$ så kallas potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k =$$
$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots$$

för <u>Taylorserien av f i c.</u> Om $c=0$ så kallas potensserien för en <u>Maclaurinserie</u>.

Vi kan inte garantera i allmänhet att potensserien blir $f(x)$ annat än i $x=c$.

Vi har därför följande definition:

Definition: En funktion f är <u>analytisk i c</u> om f har en Taylorserie i c och att serien konvergerar mot $f(x)$ i ett öppet intervall innehållande c. Om f analytisk i varje punkt i ett öppet intervall så är f analytisk på det intervallet.

De flesta elementära funktioer (e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ etc.) är analytiska där de har derivator av alla ordningar.

Några Maclaurinserier

I praktiken behöver man bara bestämma tabeller med Maclaurinserier eftersom det alltid går att göra en substitution $x = t - c$ så att en Maclaurinserie kan betraktas som en Taylorserie i c.

Exempel: Bestäm Maclaurinserien för $f(x) = e^x$. Var konvergerar den mot $f(x) = e^x$? Var är $f(x) = e^x$ analytisk? Bestäm Taylorserien i $x=1$.

Lösning: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(k)}(x) = e^x$ för alla $k \in \mathbb{Z}_+$. Vi har $f^{(k)}(0) = 1 \ \forall k$.

$\Rightarrow$ Maclaurinserien är
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Konvergensradien R ges genom

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/(n+1)!}{1/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow R = \infty$, d.v.s. serien konvergear $\forall x \in \mathbb{R}$

Låt $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. Ska nu kontrollera att $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, d.v.s. att potensserien verkligen ger funktionen.

Derivera g: $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = g(x)$$

Funktionen g uppfyller alltså differentialekvationen $g'(x) = g(x)$ som har lösning $g(x) = Ce^x = Cf(x)$ där C är en konstant. Men $f(0) = 1$ och $g(0) = 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \Rightarrow C = 1$

Vi drar slutsatsen att

$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vi drar slutsatsen att f är analytisk på hela $\mathbb{R}$.

Taylorserien i $x = 1$ fås på följande sätt

$$f(x) = e^x = e^{(x-1)+1} = e e^{x-1} = e e^t, \quad t = x - 1$$

Vi vet att $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, enligt resultatet ovan.

$$\Longrightarrow f(x) = e^x = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$$

som förstås konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi har följande Maclaurinserier och konvergens-cirklar:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \quad , x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^3 + \cdots \quad , x \in (-1,1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad , x \in (-1,1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad , x \in [-1,1]$$

Dessa, och andra Maclaurin- och ur dessa bildade Taylor-serier, kan kombineras för att skapa nya.

<u>Exempel:</u> Bestäm Maclaurinserien till $\ln(1-x^2)$ och bestäm för vilka x serien är giltig.

<u>Lösning:</u> $f(x) = \ln(1-x^2) = \ln(1+(-x^2)) =$

$$= [\text{Subst. } t = -x^2 \text{ där } x=0 \Leftrightarrow t=0] =$$

$$= \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n}{n} x^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) x^{2n}$$

Konvergenscirkel: $t \in (-1,1] \Leftrightarrow -x^2 \in (-1,1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \in [-1,1) \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

d.v.s. serien är giltig för $x \in (-1,1)$.

<u>Exempel:</u> Bestäm Taylorserien för $f(x) = \frac{1}{x}$ i $x = 3$. Var är serien giltig?

<u>Lösning:</u> $f(x) = \frac{1}{x} = [\text{subst. } t = x-3 \Leftrightarrow x = 3+t] =$

$$= \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+t/3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-t/3)} =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-(n+1)}(x-3)^n$$

Serien giltig för $-\frac{t}{3} \in (-1,1) \Leftrightarrow \frac{t}{3} \in (-1,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \in (-3,3) \Leftrightarrow x-3 \in (-3,3) \Leftrightarrow x \in (0,6)$.

d.v.s. Taylorserien gäller på intervallet $(0,6)$.

<u>Exempel:</u> Bestäm de tre första termerna i Maclaurinserien till $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

<u>Lösning:</u> $f(x) = \frac{1}{1-(1-\cos x)}$. Eftersom $1-\cos x = 0$ då $x = 0$ så använder vi Maclaurinutvecklingen för $\frac{1}{1-x}$ tillsammans med den för $\cos x$:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)} = [1-\cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots] =$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{1}{(2!)^2}x^4 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right)x^4 + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \ldots$$

Taylors sats:

När man i praktiken använder Taylorserier så räknar man ut ett ändligt antal termer som får approximera en funktion.

Vi definierar Taylorpolynomet $P_n(x)$ av grad n som

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Taylorserien blir då $\lim_{n\to\infty} P_n(x)$ eftersom $P_n(x)$ är en delsumma.

Taylors sats garanterar ett största fel vid användandet av $P_n(x)$ som approximation av f:

Sats: (Taylors sats)

Om $(n+1)$:a-derivatan till f existerar på ett intervall som innehåller c och x och om $P_n(x)$ är Taylorpolynomet av grad n till f i $x=c$ så gäller Taylors formel, d.v.s.

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

där feltermen $E_n(x)$ ges av någon av formlerna

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$ för något s mellan c och x

och $$E_n = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Den övre feltermen kallas <u>Lagrangeresttermen</u> och den undre <u>integralresttermen</u>.

Beviset bygger på induktionprincipen som vi går igenom i Föreläsning 12 då vi även ger beviset till Taylors sats.