Föreläsning 12

Induktionsbevis

För att kunna bevisa Taylors sats behöver vi en bevisteknik som kallas induktionsbevis.

Betrakta följande summor:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 &= 1^2 \\
1+3 &= 4 &= 2^2 \\
1+3+5 &= 9 &= 3^2 \\
1+3+5+7 &= 16 &= 4^2 \\
&\vdots & \vdots
\end{aligned}
$$

Vi ser att det verkar som att mönstret är att summan av de n första udda talen är n^2, d.v.s. att

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

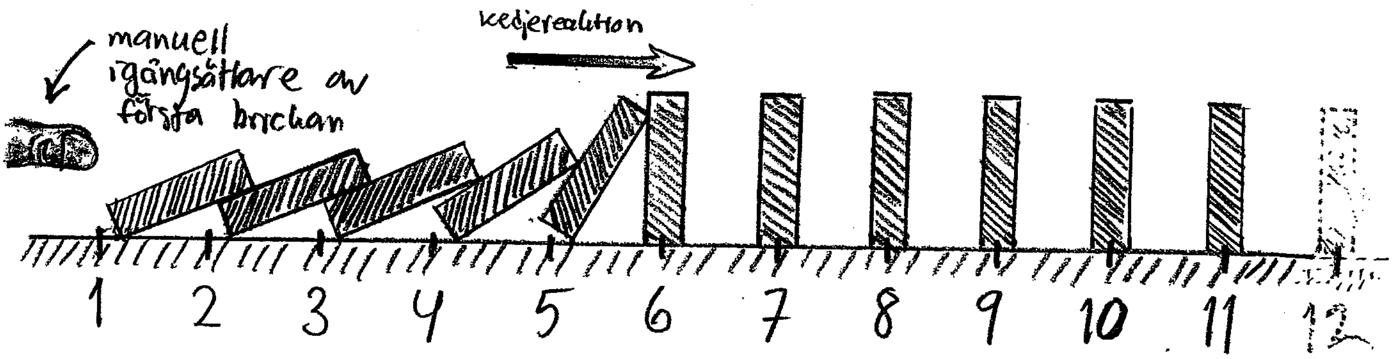
eller

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \qquad (*)$$

Hur ska vi verifiera att denna formel stämmer för alla n och inte bara de fyra första (se ovan)? Att verifiera $(*)$ för alla n kräver en annan metod än att bara räkna ut vänster- och högerled (VL resp. HL) för ett n i taget.

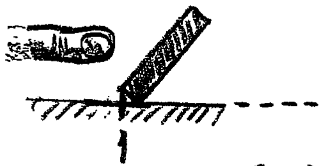
Låt oss istället tänka så här.
Föreställ er en oändligt lång rad av dominobrickor med en första dominobricka som

kommer sätta igång en kedjereaktion så att (efter oändligt tid) alla dominobrickor faller om den faller själv. D.v.s., fäll dominobricka nr 1 och nr 2 faller som i sin tur fäller nr 3 osv. Se figur:

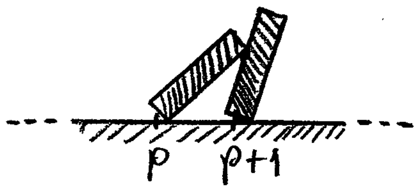


Det krävs två komponenter för att fälla <u>alla</u> domino-brickor:

(1) Man ska kunna fälla dominobricka nr 1 manuellt. (Peta till med pekfingret, t.ex.)



(2) För varje fälld domino-bricka, så fäller den domino-brickan framför sig. (Får t.ex. ej ha för långt mellanrum mellan dem.)



Överfört på problemet att bevisa

$$VL_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 = HL_n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

så ska vi alltså visa "manuellt" att $VL_1 = HL_1$ (steg (1)) och sedan att om $VL_p = HL_p$ så leder detta alltid till $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ (steg (2)). Om detta fungerar så har vi $VL_n = HL_n$

för alla $n \in \mathbb{Z}_+$, d.v.s. "alla dominobrickor är fällda". Vi har:

$$\begin{cases} VL_1 = \sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2\cdot 1-1 = 2-1 = 1 \\ HL_1 = 1^2 = 1 \end{cases}$$

Så vi kan fälla första dominobrickan manuellt. Vi <u>antar</u> $VL_p = HL_p$ d.v.s.

$$\sum_{k=1}^{p} (2k-1) = p^2$$

(dominobricka nr p <u>antas</u> fälld)

För $n = p+1$ fås

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{p} (2k-1) + [2(p+1)-1] =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{p} (2k-1)}_{=VL_p} + 2p+1 = VL_p + 2p+1 =$$

$$= \{\text{Enligt antagandet}\} = HL_p + 2p+1 =$$

$$= p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 = HL_{p+1}$$

(d.v.s. dominobricka nr $p+1$ fälld). Vi har därför enligt "dominoeffekten" visat att

$$VL_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 = HL_n \text{ gäller för alla } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Det matematiska konceptet som "dominoeffekten" är ett exempel på (eller illustrerar) kallas <u>induktionsaxiomet</u> och bevis som bygger på detta axiom kallas <u>induktionsbevis</u>.

<u>Induktionsaxiomet:</u> Om M är en delmängd av $\mathbb{Z}_+$ som uppfyller följande två villkor

(i) $1 \in M$

(ii) $p \in M \Rightarrow p+1 \in M \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+$

så gäller det att $M = \mathbb{Z}_+$.

Med M menar man den mängd som ett påstående $P(n)$ är sant på. Då betyder (i) att "$P(1)$ sant" och (ii) att "Om $P(p)$ sant så är alltid $P(p+1)$ sant". $M = \mathbb{Z}_+$ betyder då att "$P(n)$ sant för alla $n \in \mathbb{Z}_+$".

Ett exempel på påstående $P(n)$ är

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

Påståenden kan vara av varierande typ men beror alltid på ett positivt heltal (n ovan).

Vi kan alltså formulera induktionsaxiomet på formen

(i) $P(1)$ sann

(ii) För alla $p \in \mathbb{Z}_+$ gäller att om $P(p)$ sann så är $P(p+1)$ sann.

Då är $P(n)$ sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$

(i) kallas <u>startsteget</u> och (ii) <u>induktionssteget</u>

Exempel: Visa med induktionsbevis att (om $r \neq 1$):

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Lösning: Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}$ och $HL_n = \frac{1-r^n}{1-r}$.

Då ska vi visa $VL_n = HL_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

För startsteget $n=1$ har vi:

$$\begin{cases} VL_1 = \sum_{k=1}^{1} r^{k-1} = r^{1-1} = r^0 = 1 \\ HL_1 = \frac{1-r^1}{1-r} = \frac{1-r}{1-r} = 1 \end{cases}$$

d.v.s. $VL_1 = HL_1$. Startsteget verifierat.

Antag att $VL_p = HL_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$. För $n = p+1$ fås:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} r^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} r^{k-1} + r^{(p+1)-1} =$$

$$= VL_p + r^p = [\text{Antagande}] =$$

$$= HL_p + r^p = \frac{1-r^p}{1-r} + r^p =$$

$$= \frac{1-r^p + (1-r)r^p}{1-r} = \frac{1-r^p + r^p - r^{p+1}}{1-r} =$$

$$= \frac{1-r^{p+1}}{1-r} = HL_{p+1},$$

d.v.s. induktionssteget verifierat. Vi är klara.

$P(n)$ behöver inte börja med startsteget $n=1$ eller ens vara en likhet. Se exemplet nedan.

Exempel: Visa att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$

<u>Lösning:</u> Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ och $HL_n = 2 - \frac{1}{n}$.

Då ska vi visa $VL_n < HL \quad \forall n \geq 2$.

För startsteget $n=2$ har vi:

$$\begin{cases} VL_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \\ HL_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

d.v.s. $VL_2 = \frac{5}{4} < \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = HL_2$.

Startsteget verifierat.

Antag $VL_p < HL_p$, $p \in \{2,3,4,\dots\}$. För $n = p+1$ fås då:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(p+1)^2} =$$

$$= VL_p + \frac{1}{(p+1)^2} < [\text{Antagande}] <$$

$$< HL_p + \frac{1}{(p+1)^2} = \left(2 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} = (*)$$

Vi vill visa att $(*) \leq HL_{p+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p} \Leftrightarrow [\text{Mult. m. } p(p+1)^2]$$

$$\Leftrightarrow p(p+1) + p \leq (p+1)^2 \Leftrightarrow p^2 + 2p \leq p^2 + 2p + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1$$, vilket stämmer

Alltså, $VL_{p+1} < HL_{p+1}$; induktionssteget verifierat och vi har visat olikheten för alla $n \geq 2$.

Bevis av Taylors sats (Lagrangeresttermen)

Taylors sats (m. Lagrangeresttermen):

Om $(n+1)$:a-derivatan till f existerar på ett intervall innehållande c och x och om $P_n(x)$ är n:te gradens Taylorpolynom till f i $x=c$ så gäller Taylors formel, d.v.s.

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

där
$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

för något s mellan c och x.

$s \in [c,x]$, $x>c$
$s \in [x,c]$, $x<c$

Bevis: Om $n=0$ är Taylors formel

$$f(x) = P_0(x) + E_0(x) =$$
$$= f(c) + \frac{f'(s)}{1!}(x-c) = f(c) + f'(s)(x-c)$$

där s mellan c och x. Detta kan skrivas

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(s) \quad , \quad s \text{ mellan } c \text{ och } x.$$

Detta ges av medelvärdessatsen. (Fallet $n=0$ klart.)

Om $n=1$ är Taylors formel

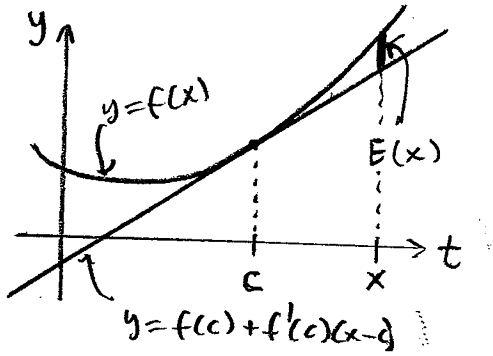
$$f(x) = P_1(x) + E_1(x) =$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-c) + \frac{f''(s)}{2!}(x-c)^2 =$$
$$= f(a) + f'(a)(x-c) + \frac{1}{2}f'(s)(x-c)^2 \quad (*)$$

där s mellan c och x.

Vi vill bevisa detta för $x > c$ ($x < c$ p.s.s.).

Låt $$f(t) = f(c) + f'(c)(t-c) + E(t)$$

där $E(t)$ är felet i en linjär approximation av $f(t)$ i $t = c$.



Vi har

$$E(t) = f(t) - f(c) - f'(c)(t-c)$$

$$\Rightarrow E'(t) = f'(t) - f'(c)$$

Använd generaliserade medelvärdessatsen på $E(t)$ och $(t-c)^2$ på $[c, x]$

$$\frac{E(x) - E(c)}{(x-c)^2 - (c-c)^2} = \frac{E'(u)}{2(u-c)} \quad \text{f.n. } u \in (c, x)$$

d.v.s. $$\frac{E(x)}{(x-c)^2} = \frac{1}{2}\frac{f'(u) - f'(c)}{u-c} \quad \text{ty } E(c) = 0.$$

Men medelvärdessatsen ger $\dfrac{f'(u) - f'(c)}{u-c} = f''(s)$ för något $s \in (c, u) \subset (c, x)$.

$$\Longrightarrow \frac{E(x)}{(x-c)^2} = \frac{1}{2} f''(s), \quad s \in (c, x).$$

d.v.s. $E(x) = \frac{1}{2} f''(s)(x-c)^2$ vilket ger (*).

(Fallet $n = 1$ klart.)

Resten av beviset bygger på matematisk induktion. Startsteget $n = 1$ kommer användas. Antag Taylors formel stämmer för $n = p$ där $n \in \mathbb{Z}_+$. Då ges alltså felet av

(†) $E_p(x) = \dfrac{f^{(p+1)}(s)}{(p+1)!}(x-c)^{p+1}$ f.n. s mellan c och x

Antag att $x > c$ (p.s.s. för $x < c$).
Använd generaliserade medelvärdessatsen på $E_{p+1}(t)$ och $(t-c)^{p+2}$ på $[c,x]$:

$$\frac{E_{p+1}(x) - E_{p+1}(c)}{(x-c)^{p+2} - (c-c)^{p+2}} = \frac{E'_{p+1}(u)}{(p+2)(u-c)^{p+1}}$$

för något $u \in (c,x)$, d.v.s.

$$(*) \quad \frac{E_{p+1}(x)}{(x-c)^{p+2}} = \frac{1}{p+2}\,\frac{E'_{p+1}(u)}{(u-c)^{p+1}} \quad \text{ty } E_{p+1}(c)=0.$$

Men

$$E'_{p+1}(u) = \frac{d}{dt}E_{p+1}(t)\Big|_{t=u} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(f(t) - P_{p+1}(t)\Big)\Big|_{t=u} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(f(t) - \sum_{k=0}^{p+1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(t-c)^k\Big)\Big|_{t=u} =$$

$$= f'(u) - \sum_{k=1}^{p+1}\frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(u-c)^{k-1} =$$

$$= f'(u) - \sum_{k=1}^{p+1}\frac{(f')^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}(u-c)^{k-1} =$$

$$[l=k-1] \quad = f'(u) - \sum_{l=0}^{p}\frac{(f')^{(l)}(c)}{l!}(u-c)^{l}$$

Vilket är felet $E_p(u)$ för $f'(u)$ i $u=c$.
Eftersom (†) gäller för alla gångbara funktioner så måste gälla att (m. f',u istf. f,x):

$$E'_{p+1}(u) = \frac{(f')^{(p+1)}(s)}{(p+1)!}(u-c)^{p+1}, \quad s \in (c,u).$$

Sätt in detta i (*):

$$\frac{E_{p+1}(x)}{(x-c)^{p+2}} = \frac{1}{p+2} \frac{\frac{(f')^{(p+1)}(s)}{(p+1)!}(u-c)^{p+1}}{(u-c)^{p+1}}$$

d.v.s. $E_{p+1}(x) = \frac{f^{(p+2)}(s)}{(p+2)!}(x-c)^{p+2}$,

vilket är det önskade felet för $n=p+1$. Induktionssteget klart, så induktionsbeviset är fullständigt. $\square$

Tillämpningar på Taylor- och Maclaurinserier

Nu följer några tillämpningar på Taylorserier.

Funktionsvärdesapproximation:

Antag att vi vill beräkna $\cos 43°$ med ett fel mindre än 10^{-4}.

Vi noterar först att 43° ligger nära 45° som vi vet cos och sin för $(= 1/\sqrt{2})$.

$$\cos 43° = \cos(45° - 2°) = [1° = \frac{\pi}{180} \text{ (rad)}] =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{180}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\right) =$$
$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{90} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{90} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{90} + \sin\frac{\pi}{90}\right)$$

Maclaurinutveckla

$$\cos 43° = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \ldots\right) + \left(\frac{\pi}{90} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 + \ldots\right)\right]$$

Notera nu att för några $s_1, s_2 \in (0, \frac{\pi}{90})$ så gäller det att

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_3^{\cos}\left(\frac{\pi}{90}\right)+E_2^{\sin}\left(\frac{\pi}{90}\right)\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\frac{d^4}{dx^4}(\cos x)\big|_{x=s_1}}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{d^3}{dx^3}(\sin x)\big|_{x=s_2}}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{24}\left|\frac{d^4}{dx^4}(\cos x)\right|\Big|_{x=s_1}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left|\frac{d^3}{dx^3}(\sin x)\right|\Big|_{x=s_2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right] \leq$$

$\leq$ [Derivator av cos och sin är cos el. sin] $\leq$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{24}\cdot 1\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 + \frac{1}{6}\cdot 1\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{24\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\left(\frac{\pi}{90}+4\right) < \frac{1}{25}\left(\frac{\pi}{20\pi}\right)^3\cdot 5 =$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{1}{20^3} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10^3} = \frac{1}{40\cdot 10^3} = \frac{1}{40}\cdot 10^{-3} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 10^{-4} < 10^{-4}$$

d.v.s. det räcker med att ta $P_3\left(\frac{\pi}{90}\right)$ för cos och $P_2\left(\frac{\pi}{90}\right)$ för sin:

$$\cos 43^\circ \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\right)+\frac{\pi}{90}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi}{90}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\right) \approx 0.731358\ldots$$

Funktioner definierade som integraler:

Antag att vi vill bestämma Maclaurinserien till

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

och använda den för att beräkna $f(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ med tre decimalers noggrannhet.

Vi har först att

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} t^{2n+1} \right) \Bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$$

serien giltig för alla $x \in \mathbb{R}$. Speciellt har vi

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} 1^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

Vi utnyttjar nu följande trick:

Antag att det för en serie $\sum_n a_n$ gäller:

(i) serien är alternerande,

(ii) $\{|a_n|\}$ avtagande, och

(iii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Då är felet vid trunkering av serien vid en delsumma likatecknigt med, och högst lika stort som absolutbeloppet av, den första utelämnade termen.

Tillämpat här noterar vi att

$$\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{(2n+1)n!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2000 < (2n+1)n!$$

Vi ser att $(2 \cdot 5+1) 5! = 11 \cdot 120 = 1320 < 2000 \quad (n=5)$

$(2 \cdot 6+1) 6! = 13 \cdot 720 = 9360 > 2000 \quad (n=6)$

Vi ser alltså att term $n=6$ kan utelämnas:

$$f(1) \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} \approx$$

≈ 0.747 (avrundat till tredje decimalen)

Gränsvärden av typen "$\frac{0}{0}$":

Vi vill beräkna $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = $ "$\frac{0}{0}$".

Detta gör man enklast med en Maclaurinserie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^3)^n\right)}{\left(1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(3x)^{2n}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right) - 1\right]\left[x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \dots\right]}{\left[1 - \left(1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \dots\right)\right]^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots\right)\left(x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \dots\right)}{\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{24}x^4 + \dots\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2x^4 - x^7 + \dots) + (2x^5 - x^8 + \dots) + \left(\frac{4}{3}x^6 - \frac{2}{3}x^9 + \dots\right)}{\frac{81}{4}x^4 - 9\cdot\frac{81}{24}x^6 + \dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + 2x^5 + \frac{4}{3}x^6 - x^7 + \dots}{\frac{81}{4}x^4 - \frac{243}{8}x^6 + \dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 + 2x + \frac{4}{3}x^2 - x^3 + \dots}{\frac{81}{4} - \frac{243}{8}x^2 + \dots} = \frac{2}{81/4} = \frac{8}{81}$$