FÖRELÄSNING 13

Klassificering av differentialekvationer

I den här kursen tittar vi på s.k. ordinära differentialekvationer (ODE:er), d.v.s. ekvationer av typen

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$

där $y = y(x)$ och F är en funktion m.a.p. $n+2$ variabler indikerade i argumentet. Vi säger att $(*)$ är av n:te ordningen ty högsta ordningens derivata i F är $y^{(n)}$.

Ett viktigt specialfall är de linjära ODE:erna:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = f(x) \qquad (\dagger)$$

Termen f i HL kallas för den inhomogena termen och beror ej på y. Om $f(x) \equiv 0$ så är $(\dagger)$ en homogen linjär ODE.

$f(x) \equiv 0$ betyder $f(x) = 0$ $\forall x \in D_f$

Sats: Antag att y_1, y_2 löser den linjära homogena ODE:n

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = 0,$$

då gör också linjärkombinationen

$$y(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$$

för varje val av konstanterna A, B.

Bevis:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}\left(Ay_1(x) + By_2(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\left(Ay_1^{(k)}(x) + By_2^{(k)}(x)\right) =$$

$$= A\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_1^{(k)}(x) + B\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_2^{(k)}(x) =$$

$$= A\cdot 0 + B\cdot 0 = 0 \qquad \square$$

Sats: Om y_1 löser den linjära homogena ODE:n

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

och y_2 löser den linjära inhomogena ODE:n

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f \qquad (**)$$

så löser också $y = y_1 + y_2$ inhomogena $(**)$.

Bevis:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}(y_1+y_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(y_1^{(k)} + y_2^{(k)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k y_1^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} a_k y_2^{(k)} =$$

$$= 0 + f = f \qquad \square$$

Första ordningens differentialekvationer

Separabla ekvationer:

En separabel ekvation är en första ordningens ODE där x och y kan "separeras", d.v.s. som kan skrivas på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

för några funktioner f, g.

Man kan skriva denna ekvation

$$(*) \qquad \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (g(y)\neq 0)$$

$$\frac{d}{dx}\int \frac{dy}{g(y)} = f(x) \qquad \left(VL = \int_a^{y(x)} \frac{dt}{g(t)}\right)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

d.v.s. som om vi multiplicerade (*) med dx och sen integrerade. $\left((*) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx\right)$

<u>Exempel:</u> Lös ekvationen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y+1}$

<u>Lösning:</u> $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y+1} \Leftrightarrow \underbrace{(y+1)dy = x^2dx}_{\text{Hjälpsteg}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int (y+1)dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 + y = \frac{1}{3}x^3 + C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y - \left(\frac{2}{3}x^3 + C_2\right) = 0 \Leftrightarrow y = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3 + C_2} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{C - \frac{2}{3}x^3}$$

där C är en integrationskonstant.

<u>Exempel:</u> Lös integralekvationen $y(x) = 3 + 2\int_1^x t\,y(t)\,dt$.

<u>Lösning:</u> Derivera: $y' = 2xy$

Om $x = 1$: $y(1) = 3 + 2\int_1^1 t\,y(t)\,dt = 3 + 2\cdot 0 = 3$

Alltså har vi ett <u>begynnelsevärdesproblem</u>

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Vi ser att differentialekvationen är separabel:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + C_1 \Leftrightarrow |y| = e^{x^2+C_1} = C_2 e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm C_2 e^{x^2} = C e^{x^2}$$

Utnyttja begynnelsevärdet: $y(1) = 3 \Leftrightarrow Ce^{1^2} = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow Ce = 3 \Leftrightarrow C = 3/e$$

$$\Longrightarrow y(x) = \frac{3}{e} e^{x^2} = 3e^{x^2-1}$$

Första ordningens linjära ekvationer:

En första ordningens linjära differentialekvation kan skrivas

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (\dagger)$$

i allmänhet där p, q givna funktioner.

- Antag $q(x) \equiv 0$, d.v.s. $(\dagger)$ homogen så att

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

eller

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

Denna är separabel, se lösningsmetoden vi härledde tidigare. (Man får då $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.)

- Antag $q(x) \not\equiv 0$, d.v.s. $(\dagger)$ inhomogen. Definiera funktionen μ genom

$$\mu(x) = \int p(x)\,dx,$$

d.v.s. en godtycklig primitiv funktion till p.

Låt oss multiplicera $(\dagger)$ med $e^{\mu(x)}$, den s.k.

<u>integrerande faktorn</u> till ekvationen. Då fås:

$$e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\mu(x)}p(x)y = e^{\mu(x)}q(x)$$

Vi noterar att $p(x) = \frac{d\mu}{dx}$, vilket ger

$$e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx}y = e^{\mu(x)}q(x)$$

d.v.s. $$e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{d}{dx}e^{\mu(x)}\right)y = e^{\mu(x)}q(x)$$

eller $$\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y\right) = e^{\mu(x)}q(x)$$

så att $$e^{\mu(x)}y = \int e^{\mu(x)}q(x)\,dx$$

vilket ger $$\boxed{y(x) = e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)}q(x)\,dx}.$$

Notera att man bör lära sig <u>metoden</u>, <u>inte</u> formeln.

<u>Exempel:</u> Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = 1 & (x>0) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

<u>Lösning:</u> $y' + \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 1$.

Här är $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1$. Integrerande faktor är $e^{\mu(x)}$ där $\mu(x) = \int p(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| = \ln x$ ty $x>0$. Vi ska alltså multiplicera ekvationen med $e^{\mu(x)} = e^{\ln x} = x$:

$$xy' + x\frac{1}{x}y = x\cdot 1 \Leftrightarrow xy' + y = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(xy) = x \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Men $y(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{C}{1} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow y(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ är lösningen

Exempel: Lös $\frac{dy}{dx} + xy = x^3$.

Lösning: Här gäller att $p(x) = x$, $q(x) = x^3$.

Integrerande faktor: $e^{\mu(x)}$ där $\mu(x) = \int p(x)\,dx =$

$$= \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\mu(x)}xy = e^{\mu(x)}x^3$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2}\frac{dy}{dx} + e^{\frac{1}{2}x^2}xy = e^{\frac{1}{2}x^2}x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}x^2}y\right) = e^{\frac{1}{2}x^2}x^3$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2}y = \int e^{\frac{1}{2}x^2}x^3\,dx =$$

$$= \int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du =$$

$$= \Big[\text{Låt } u = x^2, \quad dv = xe^{\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$\text{dvs. } du = 2x\,dx, \quad v = e^{\frac{1}{2}x^2}\Big] =$$

$$= x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - \int e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot 2x\,dx =$$

$$= x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\int xe^{\frac{1}{2}x^2}dx =$$

$$= \left[\begin{cases} t = \frac{1}{2}x^2 \\ dt = x\,dx \end{cases}\right] = x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\int e^t\,dt =$$

$$= x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^t + C =$$

$$= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + C =$$
$$= (x^2-2)e^{\frac{1}{2}x^2} + C$$

$$\Longrightarrow y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left((x^2-2)e^{\frac{1}{2}x^2} + C\right) =$$
$$= x^2 - 2 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Första ordningens homogena ekvationer:

En första ordningens differentialekvation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (*)$$

kallas <u>homogen</u>. (**OBS**: Homogen i en <u>annan</u> mening än tidigare.)

Låt oss i $(*)$ sätta $v(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xv(x)$

så att $\frac{dy}{dx} = 1\cdot v + x\cdot v' = v + xv'$; då fås

$$v + xv' = f(v)$$
$$xv' = f(v) - v$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v)-v}{x}$$

vilken är separabel och kan därför i princip lösas.

Exempel: Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x^2y' = (x^2+y^2)\arctan\frac{y}{x} + xy, & x>0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

<u>Lösning:</u> Vi kan skriva differentialekvationen

$$y' = \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\arctan\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

vilket uppenbarligen är en "homogen" ekvation.

Låt $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$

Vi får då:

$$v'x + v = (1+v^2)\arctan v + v$$

$$v' = \frac{(1+v^2)\arctan v}{x}$$

vilket är en separabel DE, d.v.s.

$$\int \frac{dv}{(1+v^2)\arctan v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$= \ln|x| + C_1 = [x>0]$$

$$= \ln x + C_1, \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

Men $VL = \left[\begin{cases} u = \arctan v \\ du = \frac{dv}{1+v^2} \end{cases}\right] = \int \frac{du}{u} = \ln|u| =$

$$= \ln|\arctan v| = \ln\left|\arctan \frac{y}{x}\right|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\arctan\frac{y}{x}\right| = \ln x + C_1$$

d.v.s. $\left|\arctan\frac{y}{x}\right| = e^{\ln x + C_1} = C_2 x, \quad (C_2 > 0)$

eller $\arctan\frac{y}{x} = C_3 x, \quad (C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

Men $y(1) = 1 \Rightarrow \arctan\frac{1}{1} = C_3 \cdot 1$

$$\arctan 1 = C_3$$

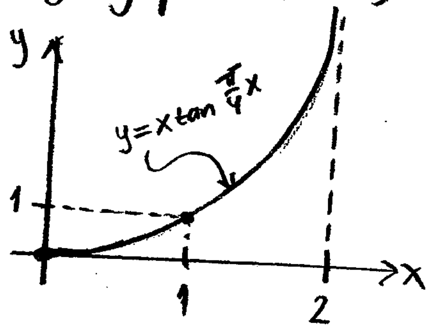
$$\frac{\pi}{4} = C_3$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}x \quad (+)$$

$$\frac{y}{x} = \tan\frac{\pi}{4}x$$

$$y(x) = x\tan\frac{\pi}{4}x$$

(Notera att i (†) måste $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 < x < 2$, och dessutom $x>0$
lösningen $y(x) = x \tan \frac{\pi}{4}x$ alltså giltig på $(0,2)$.)



Exempel: Lös $2x^2y' = x^2+y^2$

Lösning: Dividera med x^2:

$$2y' = 1 + (y/x)^2$$

Låt $v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$

$$\Rightarrow 2(v'x+v) = 1+v^2$$

$$2v'x = 1-2v+v^2$$

$$v' = \frac{1}{2x}(1-v)^2$$

d.v.s. $\int \frac{dv}{(1-v)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$

vilket ger $\frac{1}{1-v} = \frac{1}{2}\ln|x| + C_1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1-v = \frac{1}{\frac{1}{2}\ln|x|+C_1} = \frac{2}{\ln|x|+C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = 1 - \frac{1}{\ln|x|+C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{\ln|x|+C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x|+C}\right)$$

Andra ordningens linjära DE:er med konstanta koefficienter

Betrakta en differentialekvation av typen

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (*)$$

d.v.s. en andra ordningens linjära homogena differentialekvation med konstanta koefficienter.
Sådana DE:er beskriver t.ex. svängningsrörelse, t.ex. pendel med små svängningsutslag eller en vikt upphängd i fjäder.

Lösning av (*). Ansätt ekvationen på formen

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a} = [\text{ansättning}] = \\ &= \frac{d}{dx}(y' - r_1 y) - r_2(y' - r_1 y) = \\ &= y'' - r_1 y' - r_2 y' + r_2 r_1 y = \\ &= y'' + (-r_1 - r_2)y' + r_1 r_2 y \end{aligned}$$

d.v.s. $\begin{cases} -r_1 - r_2 = \frac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$. Vi vill bestämma r_1, r_2.

Lös ut r_2 från övre: $r_2 = -\frac{b}{a} - r_1$. Stoppa in i nedre:

$$r_1\left(-\frac{b}{a} - r_1\right) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow r_1^2 + \frac{b}{a}r_1 + \frac{c}{a} = 0 \qquad (+)$$

(Det visar sig att r_2 uppfyller samma ekvation; väntat p.g.a. symmetrin.)

Antag att vi löst (†) så att vi har r_1, r_2.
Då blir alltså DE:en

$$\frac{d}{dx}(y'-r_1 y) - r_2(y'-r_1 y) = 0$$

Låt $u = y' - r_1 y$. Då fås

$$u' - r_2 u = 0$$

$$\Leftrightarrow u' = r_2 u \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = r_2 \int 1 dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| = r_2 x + K_2 \Leftrightarrow |u| = e^{r_2 x + K_2} =$$

$$= \underbrace{e^{K_2}}_{>0} e^{r_2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = A_2 e^{r_2 x}, \quad A_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Men detta innebär: $y' - r_1 y = A_2 e^{r_2 x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ [Integr. fakt. $e^{\mu(x)}$, $\mu(x) = \int (-r_1) dx = -r_1 x$]

$$e^{-r_1 x} y' - e^{-r_1 x} r_1 y = A_2 e^{r_2 x - r_1 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{-r_1 x} y) = A_2 e^{(r_2 - r_1)x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-r_1 x} y = \begin{cases} A_2 \frac{1}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + C_1, & r_1 \neq r_2 \\ A_2 x + C_1, & r_1 = r_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x) = \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, & r_1 \neq r_2 \\ (C_1 + C_2 x) e^{r x}, & r_1 = r_2 = r \end{cases}}$$

Vi kallar ekvationen

$$ar^2 + br + c = 0$$

med lösningar r_1, r_2 (eller dubbelrot $r_1 = r_2 = r$) för den <u>karaktäristiska ekvationen</u> till DE:en.

Antag icke-reella rötter $r_1 = k + i\omega$, $r_2 = k - i\omega$ (kommer alltid i par). Då gäller

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} =$$
$$= C_1 e^{(k+i\omega)x} + C_2 e^{(k-i\omega)x} =$$
$$= C_1 e^{kx} e^{i\omega x} + C_2 e^{kx} e^{-i\omega x} =$$
$$= C_1 e^{kx}(\cos \omega x + i \sin \omega x) +$$
$$+ C_2 e^{kx}(\cos \omega x - i \sin \omega x) =$$
$$= (C_1 + C_2) e^{kx} \cos \omega x +$$
$$+ i(C_1 - C_2) e^{kx} \sin \omega x$$

Välj C_1, C_2 så att $K_1 = C_1 + C_2$, $K_2 = i(C_1 - C_2)$ är reella och godtyckliga. Då fås

$$\boxed{y(x) = K_1 e^{kx} \cos \omega x + K_2 e^{kx} \sin \omega x}$$

Exempel: Hitta den allmänna lösningen till

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^2 + r - 6 = 0$$

med lösning $r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+24}{4}} =$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Dessa är reella och olika så att allmän lösning ges av:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

Exempel: Bestäm lösningen till begynnelse-värdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Karaktäristisk ekvation

$$r^2 - 8r + 16 = 0$$

med lösning $r = 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} = 4 \pm \sqrt{0} = 4$, dubbelrot.

Den allmänna lösningen blir därför

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}$$

Men $y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0)e^{4 \cdot 0} = C_1$ vilket ska vara 1, d.v.s. $C_1 = 1 \Rightarrow y = (1 + C_2 x)e^{4x}$

Vi får $y' = C_2 e^{4x} + 4(1 + C_2 x)e^{4x}$

Men $y'(0) = C_2 + 4$ ska vara 0 så $C_2 = -4$

$$\Rightarrow \quad y = (1 - 4x)e^{4x}$$

Exempel: Bestäm allmänna lösningen till

$$4y'' - 12y' + 25y = 0$$

Lösning: Karaktäristisk ekvation

$$4r^2 - 12r + 25 = 0 \Leftrightarrow r^2 - 3r + \frac{25}{4} = 0$$

med lösning $r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{25}{4}} =$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-4} = \frac{3}{2} \pm 2i$$

d.v.s. icke-reella, vilket ger allmänna lösningen

$$y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} \cos 2x + C_2 e^{\frac{3}{2}x} \sin 2x$$