FÖRELÄSNING 14

Ekvationer av högre ordning med konstanta koefficienter:

Lösningen y till en n:te ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter, d.v.s.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (*)$$

(vi betraktar bara homogena DE:er) kan alltid skrivas som en linjärkombination av n st linjärt oberoende partikulärlösningar $y_1, y_2, \dots, y_n$, d.v.s.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

där $C_1, C_2, \dots, C_n$ godtyckliga konstanter.

För att lösa $(*)$ behöver vi först lösa den karakteristiska ekvationen

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad (\dagger)$$

Vi extraherar nu de n oberoende partikulärlösningarna på följande sätt:

(1) Om r_1 är en k-faldig rot till $(\dagger)$ (d.v.s. om $(r-r_1)^k$ är en faktor i VL till $(\dagger)$) så är

$$e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, t^2 e^{r_1 t}, \dots, t^{k-1} e^{r_1 t}$$

k st linjär oberoende partikulärlösningar till $(*)$.

(2) Om $r = a + ib$, $\bar{r} = a - ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ utgör ett k-faldigt par av komplexa rötter till (†) (d.v.s. $((r-a)^2 + b^2)^k$ faktor i VL till (†)) så är

$$\begin{cases} e^{at}\cos bt,\ te^{at}\cos bt,\ t^2e^{at}\cos bt, \dots, t^{k-1}e^{at}\cos bt \\ e^{at}\sin bt,\ te^{at}\sin bt,\ t^2e^{at}\sin bt, \dots t^{k-1}e^{at}\sin bt \end{cases}$$

$2k$ st linjärt oberoende lösningar till (*).

Exempel: Lös $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0 \qquad (**)$$

Vi ser "direkt" att $r = 1$ är en rot (ty

$$1^4 - 2\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0).$$

Då är $r - 1$ en faktor i VL till (**).
Vi utför därför en polynomdivision:

$$\begin{array}{rl}
r^3 - r^2 + r - 1 & \\
\hline
r^4 - 2r^3 + 2r^3 - 2r + 1 & \big|\ r - 1 \\
-(r^4 - r^3) & \\
\hline
-r^3 + 2r^2 - 2r + 1 & \\
-(-r^3 + r^2) & \\
\hline
r^2 - 2r + 1 & \\
-(r^2 - r) & \\
\hline
-r + 1 & \\
-(-r + 1) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

d.v.s. VL i (**) kan skrivas som

$$(r-1)(r^3-r^2+r-1)$$

De resterande rötterna till (**) fås genom att lösa

$$r^3-r^2+r-1=0. \qquad (\ddagger)$$

Också här ser vi "direkt" att $r=1$ är rot. (Ty $1^3-1^2+1-1=1-1+1-1=0$.) Då är $r-1$ en faktor i $(\ddagger)$, d.v.s. vi ska utföra följande polynomdivision:

$$\begin{array}{rl}
r^2+1 & \\
\hline
r^3-r^2+r-1 & \big| \; r-1 \\
-(r^3-r^2) & \\
\hline
r-1 & \\
-(r-1) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

d.v.s. VL i $(\ddagger)$ kan skrivas $(r-1)(r^2+1)$.

De sista två rötterna ges alltså som rötter till $r^2+1=0 \Leftrightarrow r=\pm i$.

Rötterna är alltså $r=1$ (dubbel) samt $r=\pm i$.

Då kan alltså lösningen skrivas

$$y = C_1 e^{1\cdot t} + C_2 t e^{1\cdot t} + C_3 e^{0\cdot t}\cos(1\cdot t) + C_4 e^{0\cdot t}\sin(1\cdot t) = (C_1+C_2 t)e^t + C_3\cos t + C_4 \sin t$$

Eulerekvationer:

En differentialekvation på formen

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

kallas för en <u>Eulerekvation</u>. Låt oss ansätta en lösning på formen $y = |x|^r$.

Detta ger
$$\frac{dy}{dx} = r|x|^{r-1}\frac{d}{dx}|x| = r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)$$

och
$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)|x|^{r-2}(\operatorname{sgn} x)^2 = r(r-1)|x|^{r-2}$$

Sätt in i ekvationen:
$$0 = ax^2\left(r(r-1)|x|^{r-2}\right) + bx\left(r|x|^{r-1}(\operatorname{sgn} x)\right) + c|x|^r =$$
$$= ar(r-1)|x|^2|x|^{r-2} + br|x||x|^{r-1} + c|x|^r =$$
$$= \left(ar(r-1) + br + c\right)|x|^r$$

d.v.s. vi får en för Eulerekvationen karakteristisk ekvation
$$ar(r-1) + br + c = 0$$
eller
$$ar^2 + (b-a)r + c = 0 \qquad (*)$$

- **Fall I:** I detta fall har $(*)$ två reella rötter r_1, r_2. Detta ger partikulärlösningar $|x|^{r_1}, |x|^{r_2}$ så att allmänna lösningen kan skrivas
$$\boxed{y = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2}}$$

- **Fall II:** I detta fall har $(*)$ en dubbelrot $r_1 = r_2 = r$. Detta ger partikulärlösningar $|x|^r, |x|^r \ln|x|$ så att allmänna lösningen kan skrivas
$$\boxed{y = (C_1 + C_2 \ln|x|)|x|^r}$$

• **Fall III:** I detta fall har (*) ett par komplexa rötter $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Detta ger partikulärlösningar $|x|^{\alpha+i\beta}$, $|x|^{\alpha-i\beta}$. Men

$$|x|^{\alpha \pm i\beta} = e^{(\alpha \pm i\beta)\ln|x|} = e^{\alpha \ln|x|}\left(\cos(\beta \ln|x|) \pm i \sin(\beta \ln|x|)\right) =$$

$$= |x|^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln|x|) \pm \sin(\beta \ln|x|)\right)$$

Detta ger allmän lösning

$$\boxed{y = C_1|x|^{\alpha}\cos(\beta \ln|x|) + C_2|x|^{\alpha}\sin(\beta \ln|x|)}$$

__Exempel:__ Lös $y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$.

__Lösning:__ Multiplicera ekvationen med x^2:

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

Detta är en Eulerekvation och har karaktäristiska ekvationen

$$r(r-1) + 3r + 1 = 0$$
$$r^2 + 2r + 1 = 0$$
$$(r+1)^2 = 0$$

vilket ger dubbelroten $r = -1$; vi ska alltså använda Fall II. Den allmänna lösningen är därför:

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)|x|^{-1} = \frac{K_1}{x} + \frac{K_2 \ln|x|}{x}$$

(__OBS:__ Ej definierad i $x=0$ och antingen definierad till vänster om origo eller till höger men aldrig både till vänster och till höger om origo.)

Inhomogena linjära ekvationer

Vi betraktar nu DE:er av typen

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\dagger)$$

d.v.s. inhomogena andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Man kan definiera en till (†) motsvarande homogen ekvation

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (\ddagger)$$

som vi redan vet hur man ~~ska~~ lösa. Kalla den allmänna lösningen till (‡) för y_h och låt y_p vara en s.k. partikulärlösning till (†), d.v.s. vilken lösning som helst till (†). Då kan den allmänna lösningen till (†) skrivas

$$y = y_p + y_h$$

Man får ansätta lämpliga y_p som påminner om $f(x)$.

Exempel: Lös $y'' - 2y' = 12x - 10$.

Lösning: Homogen ekvation: $y'' - 2y' = 0$

Karaktäristisk ekvation: $r^2 - 2r = 0$

$$r(r-2) = 0$$

d.v.s. rötter $r = 0$, $r = 2$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{2\cdot x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Partikulärlösning: Ansätt $y_p = Ax + B$ som påminner om $12x - 10$. Vi får då:

$y_p' = A$, $y_p'' = 0$. Sätt in i ekvationen:

$$0 - 2A = 12x - 10$$
$$A = 5 - 6x$$

Detta saknar lösning, d.v.s. inga partikulärlösningar på formen $Ax+B$. Då måste man pröva med ett polynom av högre ordning:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$
$$\Rightarrow y_p' = 2Ax + B$$
$$\Rightarrow y_p'' = 2A$$

Vilket insatt i ekvationen ger

$$2A - 2(2Ax + B) = 12x - 10$$
$$(-4A)x + (2A - 2B) = 12x - 10$$
$$(-2A)x + (A - B) = 6x - 10$$

d.v.s.
$$\begin{cases} -2A = 6 \\ A - B = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = A + 10 = -3 + 10 = 7 \end{cases}$$

Vi har alltså en partikulärlösning

$$y_p = -3x^2 + 7x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Detta ger den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = (-3x^2 + 7x + C) + C_1 + C_2 e^{2x} =$$
$$= C_2 e^{2x} + (C + C_1) - 3x^2 + 7x =$$
$$= C_2 e^{2x} + C_3 - 3x^2 + 7x$$

där C_2, C_3 reella konstanter.

Exempel: Lös $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ (*).

Lösning: Homogen ekvation: $y''-2y'+2y=0$

Karaktäristisk ekvation: $r^2-2r+2=0$

$$r=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm i$$

$$\Longrightarrow y_h = C_1e^{1\cdot x}\cos(1\cdot x)+C_2e^{1\cdot x}\sin(1\cdot x)=$$
$$=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$$

Partikulärlösning: Vi ser att $e^x\sin x$ (HL i (*)) löser den homogena ekvationen. Vi måste därför ansätta y_p på en något annan form. Vi låter

$$y_p = Axe^x\cos x+Bxe^x\sin x$$

$$\Longrightarrow y_p' = Ae^x\cos x+Axe^x\cos x-Axe^x\sin x+$$
$$+Be^x\sin x+Bxe^x\sin x+Bxe^x\cos x=$$
$$=(A+(A+B)x)e^x\cos x+$$
$$+(B+(B-A)x)e^x\sin x$$

$$\Longrightarrow y_p'' = (A+B)e^x\cos x+(A+(A+B)x)e^x\cos x-$$
$$-(A+(A+B)x)e^x\sin x+$$
$$+(B-A)e^x\sin x+(B+(B-A)x)e^x\sin x+$$
$$+(B+(B-A)x)e^x\cos x=$$
$$=((2A+2B)+2Bx)e^x\cos x+$$
$$+((-2A+2B)-2Ax)e^x\sin x=$$
$$=2((A+B)+Bx)e^x\cos x+$$
$$+2((B-A)-Ax)e^x\sin x$$

vilket insatt i (*) ger:

$$e^x \sin x = 2\big((A+B)+Bx\big)e^x\cos x + 2\big((B-A)-Ax\big)e^x\sin x -$$
$$-2\big(A+(A+B)x\big)e^x\cos x - 2\big(B+(B-A)x\big)e^x\sin x +$$
$$+2Ax\,e^x\cos x + 2Bx\,e^x\sin x =$$

$$= 2\big((A+B-A)+(B-(A+B)+A)x\big)e^x\cos x +$$
$$+2\big((B-A-B)+(-A-(B-A)+B)x\big)e^x\sin x =$$

$$= 2Be^x\cos x - 2Ae^x\sin x$$

d.v.s. $\begin{cases} 2B = 0 \\ -2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{2}x\,e^x\cos x$

Detta ger de allmänna lösningarna

$$y = -\frac{1}{2}x\,e^x\cos x + C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x =$$
$$= \left(C_1 - \frac{1}{2}x\right)e^x\cos x + C_2e^x\sin x$$

Man kan formulera följande allmänna regler för hur man ska ansätta partikulärlösningar.

Antag att A_n, B_n, P_n är polynom av n:te graden. Då ska vi för

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (+)$$

leta partikulärlösning y_p enligt följande recept:

- Om $f(x) = P_n(x)$, låt $y_p(x) = x^m A_n(x)$
- Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}$, låt $y_p(x) = x^m A_n(x)e^{rx}$

Om $f(x) = P_n(x)e^{rx}\cos kx$ eller
$f(x) = P_n(x)e^{rx}\sin kx$,

låt $\quad y_p = x^m e^{rx}(A_n(x)\cos kx + B_n(x)\sin kx)$

där m är minsta av 0,1,2 så att ingen term i y_p löser den homogena versionen av (†). (Man bör alltså först ha plockat fram y_h.)

Numeriska lösningsmetoder för DE:er

I praktiken så kan man ofta(st) inte lösa differentialekvationer med analytiska metoder. Då måste man använda en lämplig numerisk metod istället.

Antag att den första ordningens ordinära differentialekvationen vi vill lösa kan skrivas

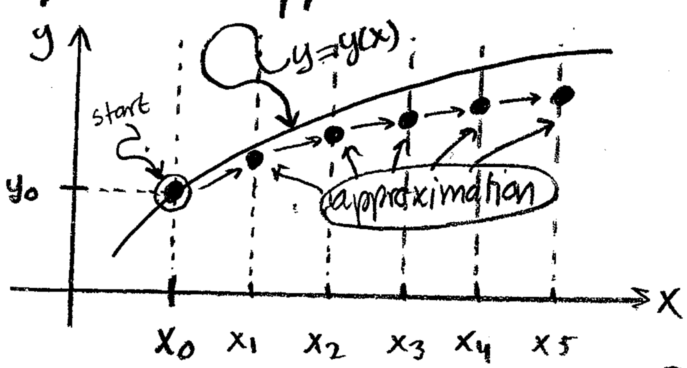
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

och att den har en unik lösning $y=y(x)$ på något intervall kring x_0. Vi vill approximera den exakta lösningen $y(x_n)$ i x_n med y_n där

$$x_n = x_0 + nh.$$

Talet $h \neq 0$ kallas <u>steglängden</u> till approximationen.

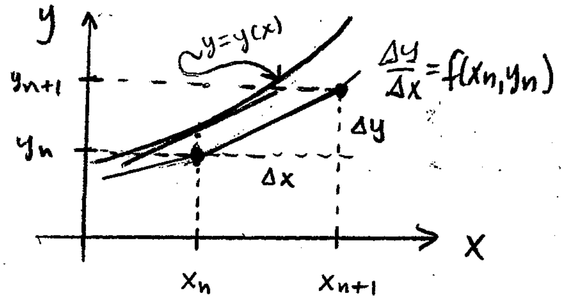
Vi vill konstruera metoder där y_{n+1} ges i termer av det föregående steget y_n.



Eulers stegmetod:

Denna metod approximerar $y=y(x)$ som ett polygontåg där varje linjesegment har horisontell längd h och lutning given av $f(x,y)$ för ändpunkten på föregående linjesegment. Iterationsformel:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h \quad (= x_0 + nh), \qquad y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)}$$



Exempel: Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x+y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

med Eulers stegmetod på intervallet $[0,1]$ med steglängd $h=0.25$. Beräkna felet $e_n = y_n - y(x_n)$ i varje steg. (Ledtråd: Exakt lösning $y(x) = e^x - x - 1$.)

Lösning: Vi har $f(x,y) = x+y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0.25$.

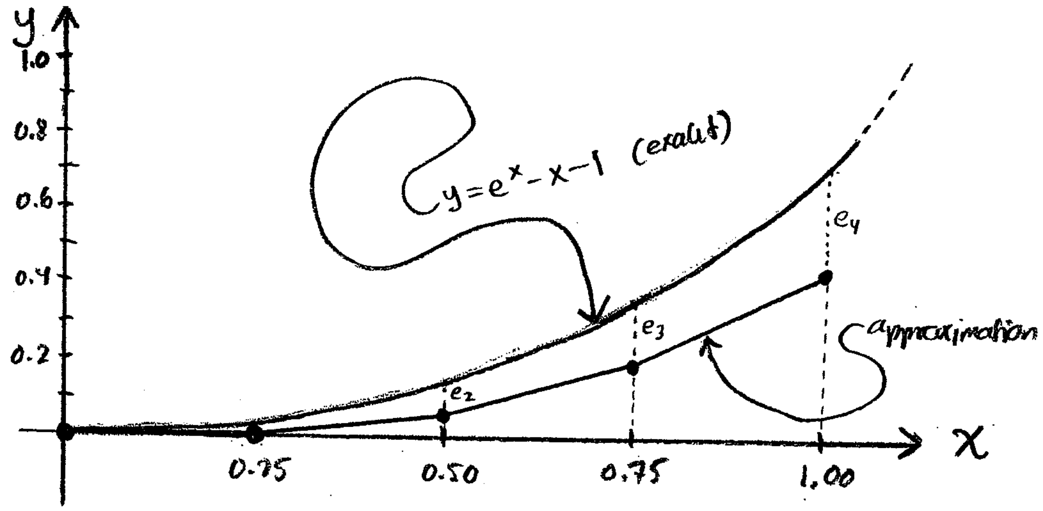
Alltså fås

$$x_n = \frac{n}{4}, \quad y_{n+1} = y_n + 0.25(x_n + y_n) \quad (= 0.25x_n + 1.25y_n)$$

Vi får då följande tabell:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	y_{n+1}	$e_n = y_n - y(x_n)$
0	0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.25	0.0000	0.2500	0.0625	−0.0340
2	0.50	0.0625	0.5625	0.2031	−0.0862
3	0.75	0.2031	0.9531	0.4414	−0.1639
4	1.00	0.4414	(1.4414)	—	−0.2769

Se figur:



Notera att e_n växer för varje steg och att det är proportionellt mot h^2, d.v.s. hade vi tagit t.ex. $h=0.125$ istf. $h=0.25$ så hade felet för varje steg bara varit $\left(\frac{0.125}{0.25}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ så stort (ungefär).

Den förbättrade Eulermetoden:

Vi får bättre noggrannhet om vi tar i beaktande även lutningen i nästa punkt:

$$y_{n+1}=y_n+h\underbrace{\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})}{2}}_{\text{Medelvärde av lutningarna i } (x_n,y_n) \text{ och } (x_{n+1},y_{n+1})}$$

I praktiken approximerar vi y_{n+1} i f med Eulers stegmetod: $u_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$. Vi får då iterationsformlerna:

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h & (=x_0+nh) \\ u_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}=y_n+h\dfrac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2} \end{cases}}$$

Detta kallas för den förbättrade Euler(-steg-)metoden.

Exempel: Lös samma begynnelsvärdesproblem som i förra exemplet med samma steglängd $h=0.25$.

Lösning: Vi har $f(x,y)=x+y$, $x_0=0$, $y_0=0$, $h=0.25$.

Alltså fås: $x_n = \frac{n}{4}$, $u_{n+1} = y_n + 0.25(x_n+y_n) =$

$$(= 0.25x_n + 1.25y_n)$$

och $y_{n+1} = y_n + 0.125((x_n+y_n)+(x_{n+1}+u_{n+1})) =$

$$= y_n + 0.125(2x_n + h + y_n + u_{n+1})$$

Vi får följande tabell efter litet räkning:

n	x_n	y_n	u_{n+1}	y_{n+1}	$e_n = y_n - y(x_n)$
0	0.00	0.0000	0.0000	0.0313	0.0000
1	0.25	0.0313	0.1016	0.1416	−0.0028
2	0.50	0.1416	0.3020	0.3533	−0.0071
3	0.75	0.3533	0.6291	0.6949	−0.0137
4	1.00	0.6949	(1.1186)	——	−0.0234

Vi noterar att felet denna gång är mindre än 1/10 av felet som man fick för Eulers (ursprungliga) stegmetod. Det gäller att felet för Eulers förbättrade metod är proportionellt mot h^3 för varje steg.

Runge—kutta-metoden: Detta är en metod som har ett fel som är proportionellt mot h^5 varje steg. Detaljerna finns i boken, metoden kommer ej på tentan.

(**Notera:** Om felet varje steg är prop. mot h^m för varje steg så är det totala ackumulerade felet prop. mot h^{m-1} ty antalet steg prop. mot $1/h = h^{-1}$.)