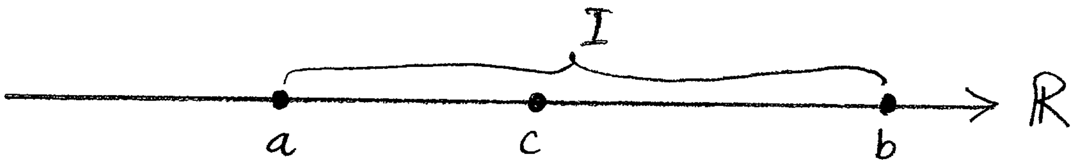
FÖRELÄSNING 2

Kontinuitet

Vi börjar med några definitioner.

Definition: Låt I vara ett intervall av någon av typerna (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ eller $[a,b]$ och antag att $a<c<b$. Då kallas c för en inre punkt till I och a och b för (vänster- resp. höger-)ändpunkter till I.



OBS: Ändpunkterna till intervallet behöver inte ligga i intervallet. Då kan $\begin{cases} a = -\infty, \\ b = \infty. \end{cases}$

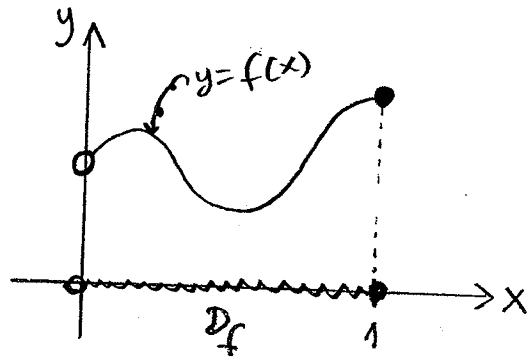
Definition: Antag funktionen $f(x)$ har en definitionsmängd $D_f = I_1 \cup I_2 \cup \cdots I_n$ där I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, är intervall* av någon av typerna ovan. Då är c en inre punkt till D_f om c är en inre punkt till något intervall I_j, och a är en ändpunkt till D_f om a är en ändpunkt till något I_j och $a \in I_j \subset D_f$.

* Intervall som ej skär varandra

①

Notera att ändpunkten till en definitionsmängd <u>måste</u> ligga i definitionsmängden.

Exempel: $D_f = (0,1]$



Då är både 0 och 1 ändpunkter till intervallet $(0,1]$ men 0 är inte en ändpunkt till D_f ty $0 \notin D_f$.

Alla punkter i $(0,1)$ är inre punkter till både D_f och $(0,1]$.

Vi kan nu införa en intuitiv kontinuitetsdefinition:

Definition: En funktion f är kontinuerlig
(Intuitiv) i den i D_f inre punkten c om

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

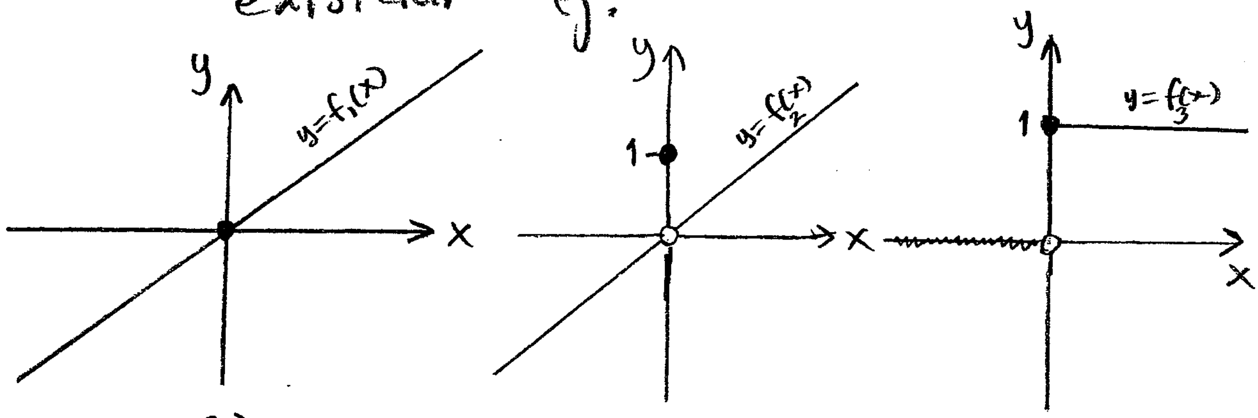
Annars är f diskontinuerlig i c.

Exempel: (1) $f_1(x) = x$ är kontinuerlig i $x=0$

(2) $f_2(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, är diskontinuerlig i $x=0$ ty $\lim_{x \to 0} f_2(x) =$

$= 0 \neq 1 = f_2(0)$

(3) $f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, är diskontinuerlig i $x=0$ ty $\lim_{x \to 0} f_3(x)$ existerar ej.



(1) kontinuerlig i 0 ($\lim f = f$)

(2) diskontinuerlig i 0 ($\lim f \neq f$)

(3) diskontinuerlig i 0 ($\lim f$ finns ej)

Definition: (Intuitivt) f är högerkontinuerlig i c om
$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$$

Motsvarande definition för vänsterkontinuitet.

Exempel: f_3 ovan är höger- men inte vänsterkontinuerlig i $x=0$.
(f_3 kallas f.ö. för Heavisidefunktionen.)

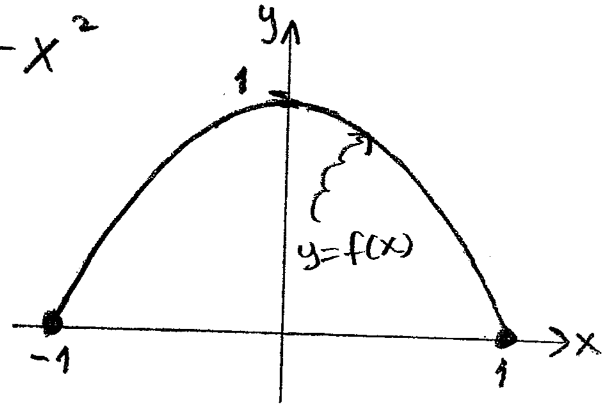
Sats: f är kontinuerlig i c omm f är både vänster- och högerkontinuerlig i c.

Detta är en intuitivt rimlig sats.

Definition: f är kontinuerlig i vänstra ändpunkten c till D_f om f är högerkontinuerlig i c.

Motsvarande gäller för högra ändpunkten.

Exempel: Låt $f(x) = 1 - x^2$ med $D_f = [-1, 1]$.

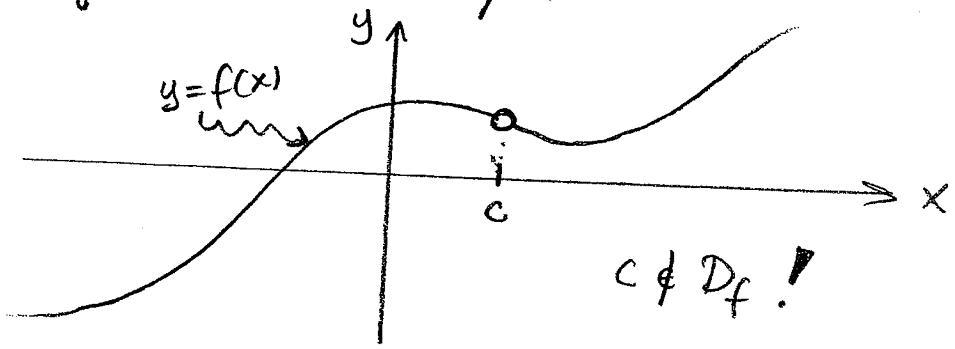


f är kontinuerlig i båda ändpunkterna eftersom den är höger- resp. vänsterkontinuerlig i dessa ($x = -1$ och $x = 1$).

Definition: f är kontinuerlig på intervallet I om f är kontinuerlig i alla punkter $c \in I$.

f är en kontinuerlig funktion om f är kontinuerlig i alla punkter $c \in D_f$

OBS: Funktionsgrafen kan ha hål trots att funktionen är kontinuerlig. Hålet tillhör ej definitionsmängden i detta fall.



$c \notin D_f$!

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$, f kont. på D_f, så f kont.

Sats: Om f, g kontinuerliga i c så är deras summa, differens, produkt, kvot (om definierad) och n:te roten $f^{1/n}$ (där $f(c) > 0$ om n jämn) också kontinuerlig i c.

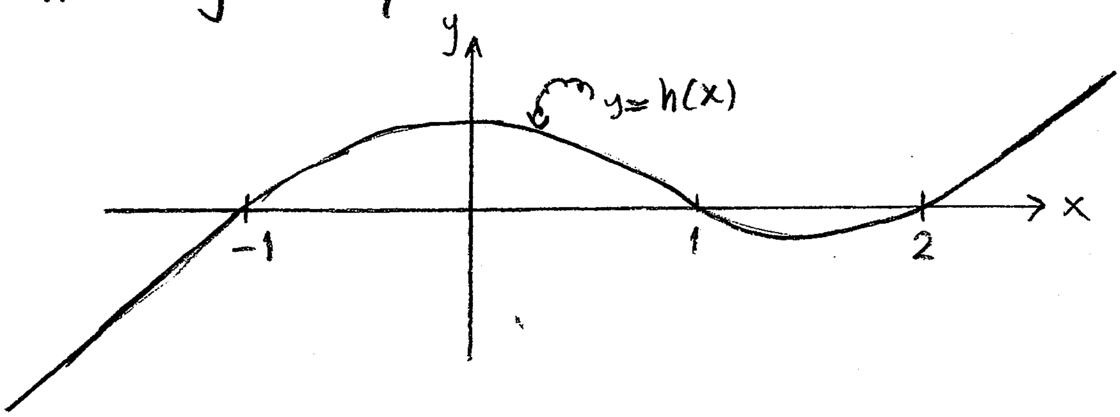
Sats: Om g är kontinuerlig i c och f är kontinuerlig i $g(c)$ så är sammansättningen $f \circ g$ kontinuerlig i c.

Exempel: $h(x) = (x^3 - 2x^2 - x + 2)^{1/3}$

Låt $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. g är kontinuerlig eftersom den är uppbyggd som summa, produkt och differens av kontinuerliga funktioner.

Låt $f(x) = x^{1/3}$ som är kontinuerlig.

Sammansättningen $h = f \circ g$ är då kontinuerlig enligt satsen ovan.



Hävbara diskontinuiteter: Antag att $\lim_{x\to c} f(x)$ existerar men att antingen (1) $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

(2) $c \notin D_f$

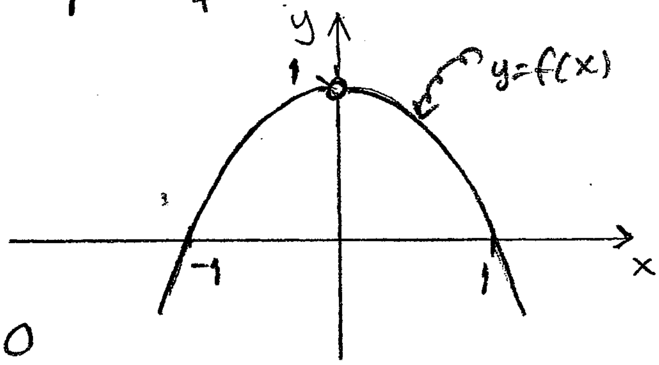
gäller. Då kan vi definiera en funktion F som uppfyller $F(x) = f(x)$ för alla $x \in D_f \setminus \{c\}$ och $F(c) = \lim_{x\to c} f(x)$.

Då är c en hävbar diskontinuitet och F är den kontinuerliga utvidgningen till f i c.

Exempel: $f(x) = \dfrac{x - x^3}{x}$, ej definierad i $x=0$

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{på } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$



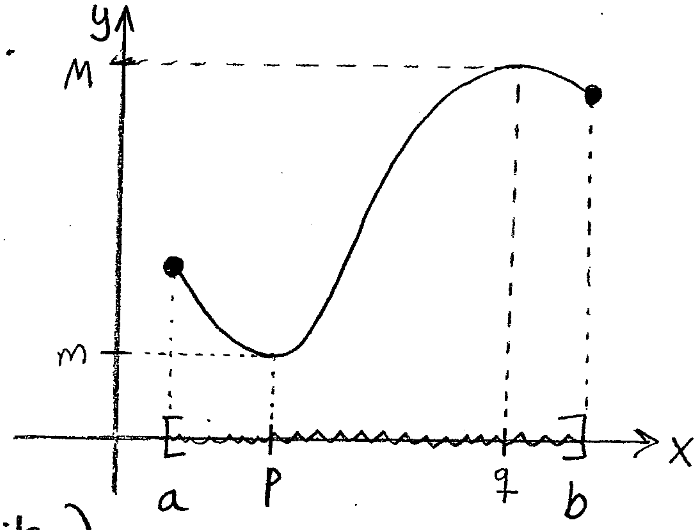
Vi låter

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

då har vi upphävt "diskontinuiteten" och F är kontinuerlig på hela $D_F = \mathbb{R}$.

Sats: Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ (slutet ändligt intervall) så finns $p, q \in [a, b]$ så att $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ $\forall x \in [a, b]$.

Detta är satsen om största och minsta värde och säger att f har ett största värde $M = f(q)$ och ett minsta värde $m = f(p)$ på intervallet $[a,b]$.



(Beviset finns i Appendix III i Adams "Calculus", kräver bl.a. axiomet om minsta övre och största undre begränsning samt teori för talföljder.)

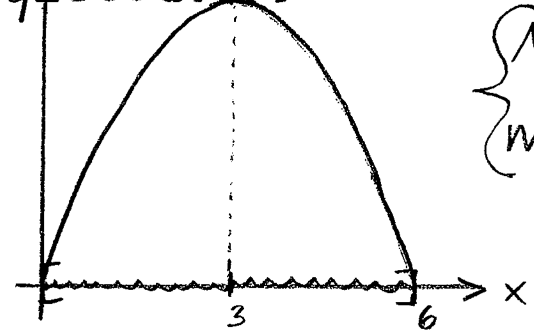
<u>Exempel:</u> Hitta största och minsta värde (M resp. m) för $f(x) = 6x - x^2$, $D_f = [0,6]$

f är kontinuerlig på $[0,6]$ så enligt satsen finns M och m. Kvadratkomplettera:

$$f(x) = 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) =$$
$$= -(x^2 - 2x\cdot 3 + 3^2) + 3^2 =$$
$$= -(x-3)^2 + 9 = 9 - (x-3)^2$$

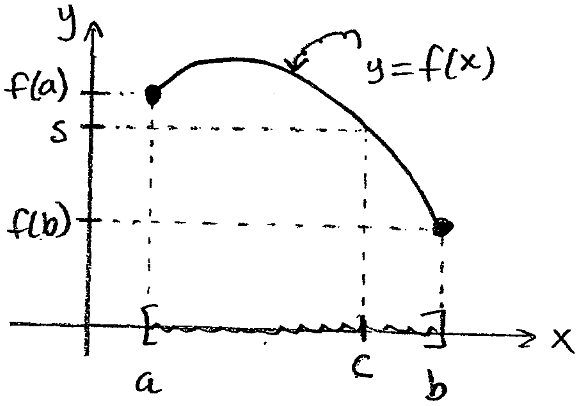
På $[0,6]$ fås M för $q = 3$ och m för $p = 0, 6$. Då gäller

$$\begin{cases} M = f(3) = 9 \\ m = f(0) = f(6) = 0 \end{cases}$$



Satsen om mellanliggande värde:

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ och s ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ så finns det $c \in [a,b]$ så att $s = f(c)$.



OBS: Antingen gäller
$f(a) < s < f(b)$
eller $f(b) < s < f(a)$
(Det senare i figuren.)

Beviset till satsen finns i Appendix III i Adams, kräver axiomet om minsta övre och största undre begränsning.

Exempel: Ekvationen $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
har en lösning på intervallet $[0,2]$.
Visa detta med satsen om mellanliggande värde.

Låt $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Då är $f(0) = 0^3 - 2\cdot 0^2 - 5\cdot 0 + 6 = 6$

$f(2) = 2^3 - 2\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = -4$

Enligt satsen så finns $c \in [0,2]$ så att $f(c) = 0$ ty $f(2) \le 0 \le f(0)$

(Det råkar gälla att $c = 1$: $1^3 - 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 6 = 0$)

Den formella definitionen av gränsvärde

Vad betyder $\lim_{x \to a} f(x) = L$, d.v.s. "$f(x)$ har gränsvärdet L då x går mot a", egentligen?

Strikt matematiskt så innebär detta påstående att felet $|f(x) - L|$ kan garanteras vara mindre än vilken tolerans som helst bara vi väljer $|x-a|$ tillräckligt litet.

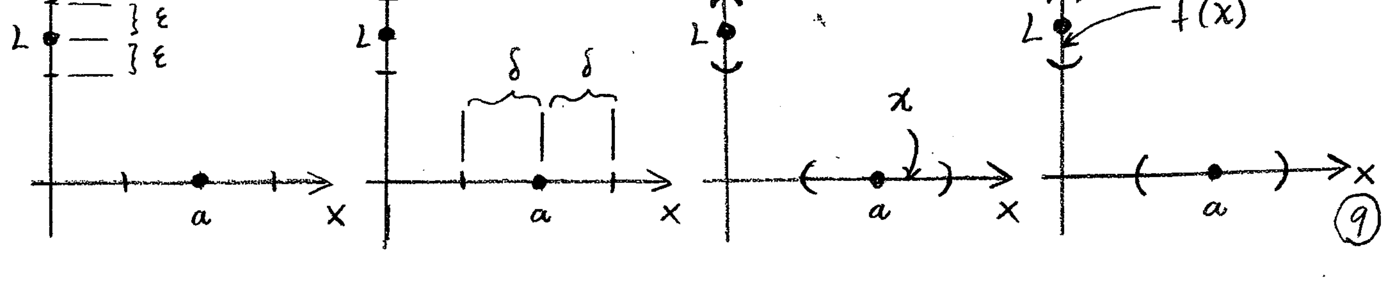
Definition: (Formell) Vi säger att $\lim_{x \to a} f(x) = L$ om följande villkor är uppfyllt:

För varje tal $\varepsilon > 0$ så finns ett tal $\delta > 0$ som kan bero på ε sådant att om $0 < |x-a| < \delta$ så fås $|f(x) - L| < \varepsilon$.

OBS: Denna metod verifierar bara att L är en gräns, den hittar inte L.

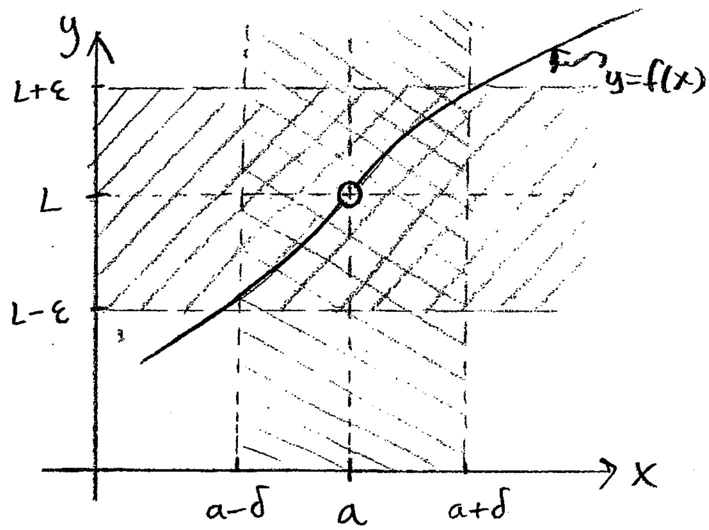
Schematiskt:

$\underbrace{\text{för varje } \varepsilon > 0}$ $\underbrace{\text{finns } \delta > 0}$, sådant att om $\underbrace{0 < |x-a| < \delta}$ så $\underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}$,



Notera räcker att hitta ett δ som fungerar för det godtyckligt lilla ε man för tillfället tittar på, δ behöver inte fungera för alla ε.

Den formella gränsvärdesdefinitionen är som en slags tävling där δ antingen förlorar mot ε eller spelar oavgjort. Om L är ett gränsvärde så kan alltid ett δ hittas som svarar mot det drag ε gör. (Oavgjort.) Om L inte är gränsvärde så kommer man till slut till en punkt där δ saknar ett lyckat motdrag — ε har vunnit.



Exempel: Verifiera $\lim\limits_{x\to 2} x^4 = 16$

Lösning: Givet $\varepsilon > 0$. Vill hitta $\delta = \delta(\varepsilon)$ sådant att om $0 < |x-2| < \delta$ så $|x^4 - 16| < \varepsilon$.

$$|x^4-16| = |(x^2-4)(x^2+4)| = |(x-2)(x+2)(x^2+4)| =$$
$$= \left(|x+2|\,|x^2+4|\right)|x-2|$$

Välj $\delta \leq 1$. Då gäller $0 < |x-2| < \delta \leq 1$,

$$\Longrightarrow \quad 1 < x < 3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |x+2| < 3+2 = 5 \\ |x^2+4| < 3^2+4 = 13 \end{cases}$$

Alltså, $|x^4-16| < (5\cdot 13)|x-2| = 65|x-2|$

om $0 < |x-2| < \delta$ där $\delta \leq 1$, d.v.s. $|x-2|<1$.

$|x^4-16| < \varepsilon$ uppfylls därför då

$$65|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon/65$$

Vi sammanfattar: Om $|x-2| < 1$ och

$|x-2| < \varepsilon/65$ så $|x^4-16| < \varepsilon$.

Välj $\delta = \min\{1, \varepsilon/65\}$ så måste vi uppenbarligen ha

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^4-16| < \varepsilon$$

d.v.s. $\lim_{x\to 2} x^4 = 16$.

I praktiken använder vi inte den formella gränsvärdesdefinitionen för att beräkna gränsvärden. Istället använder vi $\lim_{x\to a} x = a$ och $\lim_{x\to a} k = k$ (visas lätt) samt gränsvärdesreglerna för summa, differens, produkt, kvot etc. som kan bevisas formellt.

Exempel: $\lim_{x\to 2} x^4 = \lim_{x\to 2} x\cdot x\cdot x\cdot x =$ [Produktregeln] $=$

$$= \left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^4 = [\lim_{x\to a} x = a] = 2^4 = 16$$

<u>Definition:</u> f har högergränsvärde L, $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, om följande villkor är uppfyllt:

För varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att om $a < x < a + \delta$ så $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Vänstergränsvärde har motsvarande definition.

<u>Definition:</u> Vi säger att $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ om följande villkor är uppfyllt:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $R > 0$ s.a. om $x > R$ så $|f(x) - L| < \varepsilon$

Gränsvärde då $x \to -\infty$ definieras på motsvarande sätt.

<u>Definition:</u> Vi säger att $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ om:

För varje $B > 0$ finns $\delta > 0$ s.a. om $0 < |x-a| < \delta$ så $f(x) > B$.

<u>Exempel:</u> Verifiera $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$. (*)

<u>Lösning:</u> Givet $B > 0$. Vi har $\frac{1}{|x|} > B \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{B}$

Välj $\delta = 1/B$. Då gäller uppenbarligen

$0 < |x - 0| < \delta = 1/B \Rightarrow \frac{1}{|x|} > B$, d.v.s. (*).