FÖRELÄSNING 3

Derivatan

Derivatan Derivatan är ett mått på hur mycket tangenten till en funktions-graf lutar och beskriver hur snabbt funktionsvärdena ändras när man rör sig genom punkten man deriverar i.

Definition: Derivatan f' till f är en funktion som definieras genom gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (*)$$

för de $x \in D_f$ där gränsvärdet existerar. Om $f'(x)$ existerar så är f deriverbar i x.

OBS: $(*)$ kan, om vi vill definiera $f'(a)$, skrivas på den alternativa formen

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (**)$$

Enligt den formella gränsvärdesdefinitionen betyder $(**)$ egentligen:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att om $0 < |x-a| < \delta$ så $\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$

Definition: f är deriverbar på $S \subset \mathbb{R}$ om f är deriverbar i alla $x \in S$.

D_f är i praktiken (unioner av) intervall.
f' är odefinierad i ändpunkterna på intervall.

Definition: Låt $[a,b] \subset D_f$. Då kallas

$$f_+'(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

högerderivatan till f i a.
Motsvarande för vänsterderivatan $f_-'(b)$.

f kallas deriverbar på $[a,b]$ om $f'(x)$ finns för alla $x \in (a,b)$ och $f_+'(a), f_-'(b)$ finns.

Exempel: Visa med derivatans formella definition att för $f(x) = x^2$ så gäller $f'(x) = 2x$.

Lösning: Vi vill visa att för varje $\varepsilon > 0$ så finns $\delta = d(\varepsilon)$ s.a. om $0 < |x-a| < \delta$ så $\left| \frac{x^2 - a^2}{x-a} - 2a \right| < \varepsilon$ (d.v.s. $f'(a) = 2a$)

$$\left| \frac{x^2 - a^2}{x-a} - 2a \right| = \left| \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} - 2a \right| = |(x+a) - 2a| =$$

$$= |x-a| \qquad (*)$$

Välj $\delta = \varepsilon$ så måste gälla att om

$0 < |x-a| < \delta$ så $\left|\frac{x^2-a^2}{x-a} - 2a\right| < \varepsilon$ p.g.a. (*)

Man kan visa att i allmänhet gäller att om $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$, så $f'(x) = rx^{r-1}$.

Notation: Det finns flera sätt att beteckna derivatan av $y = f(x)$, t.ex.

$$f'(x),\ D_x f(x),\ Df(x),\ \frac{d}{dx}f(x),\ \frac{df}{dx}(x),$$

$$y',\ D_x y,\ Dy,\ \frac{d}{dx}y,\ \frac{dy}{dx} \quad \text{etc.}$$

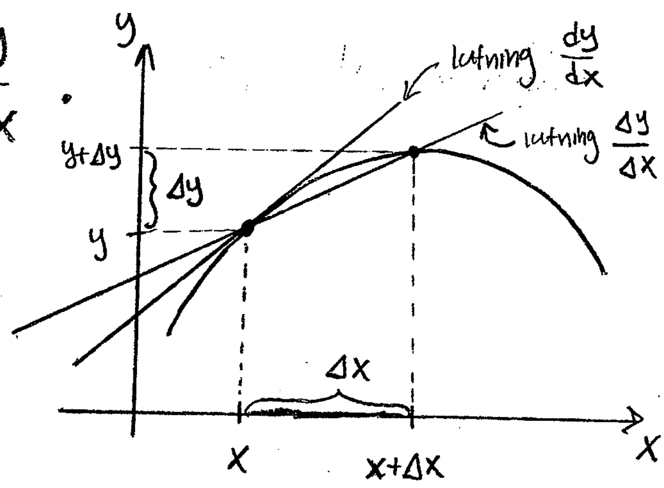
Symbolerna $D_x, D, \frac{d}{dx}$ kallas differential-operatorn m.a.p. x (om D är m.a.p. x).
På linjär algebra-språk är differential-operatorer linjära avbildningar eftersom

$$D(af+bg) = aDf + bDg$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ och f, g deriverbara funktioner.

Speciellt intressant är användningen av $\frac{d}{dx}$ som kallas Leibniznotation. (Att använda prim (d.v.s. $f'(x)$, y' etc.) kallas Newton-notation, även om Newton egentligen skrev $\dot{y}$, en notation som än idag används av fysiker för att ange förändring m.a.p. tiden.)
Man kan förstå notationen $\frac{dy}{dx}$ genom

att $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



Om man vill markera att vi beräknar derivatan i en särskild punkt $x = x_0$ så använder man det s.k. insättnings-tecknet $\Big|_{x=x_0}$, t. ex. $\dfrac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$, $y'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$, $D_x y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$ etc.

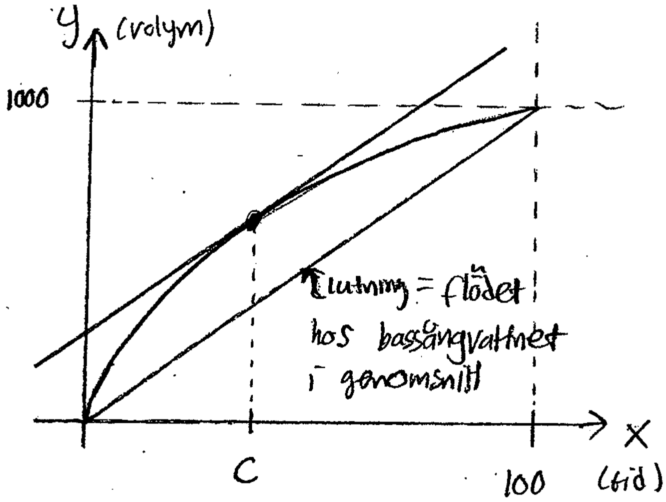
Exempel: $\dfrac{d}{dx} x^2 \Big|_{x=2} = 2x\Big|_{x=2} = 2\cdot 2 = 4$

Annars hade man varit tvungen att först härleda $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ och sedan sätta in $x=2$: $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$.

Sats: Antag att funktionen f är given och att f' existerar på $[a,b]$. Då uppfyller f' satsen om mellanliggande värde på $[a,b]$, d.v.s. för varje s mellan $f'(a)$ och $f'(b)$ så existerar $c \in [a,b]$ sådant att $f'(c) = s$.

Medelvärdessatsen

Antag att en simbassäng på 1000 m^3 har fyllts på 100 timmar med varierande flöde. Detta gör i genomsnitt ett flöde på 10 m^3/h.



Fråga: Är flödet vid någon tidpunkt lika med genomsnittsflödet?

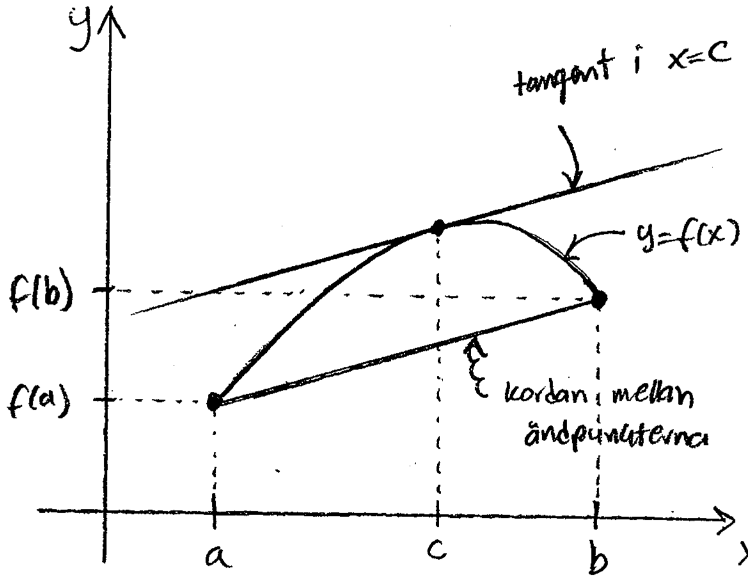
Borde rimligen gälla, ty om flödet $\frac{dy}{dx}$ vore < 10 m^3/h hela tiden så fås < 1000 m^3 efter 100 h, och om flödet > 10 m^3/h så > 1000 m^3 efter 100 h. Alltså måste man någon gång under de 100 timmarna gå från < 10 m^3/h till > 10 m^3/h eller tvärtom, och då under minst ett ögonblick $x = c \in (0, 100)$ ha ett flöde på 10 m^3/h.

Detta bekräftas av satsen nedan:

Sats: (Medelvärdessatsen) Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Då finns en punkt $c \in (a, b)$ sådan att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Innebörden av satsen:



Det finns en tangentlinje till funktionen som är parallell med kordan sammanbinder ändpunkterna till funktionskurvan (kordan är den i någon mening genomsnittliga tangentlinjen till funktionskurvan).

Exempel: Verifiera medelvärdessatsen för $f(x)=x^3$ på intervallet $[0,1]$.

Lösning: Satsen säger att det finns $c \in (0,1)$ sådant att

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

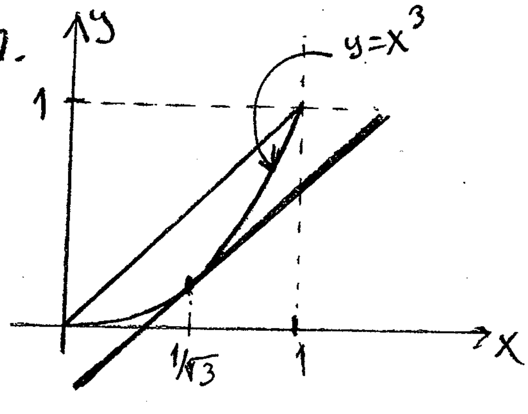
d.v.s.

$$\frac{d}{dx} x^3 \Big|_{x=c} = \frac{1^3-0^3}{1-0}$$

$$3c^2 = 1$$

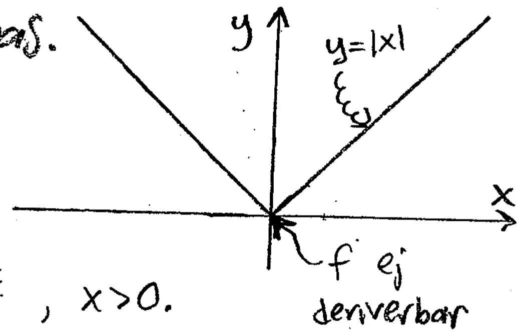
$$c = \pm 1/\sqrt{3}$$

Med $c = 1/\sqrt{3} \in (0,1)$ har vi alltså verifierat medelvärdessatsen.



Exempel: Låt $f(x) = |x|$ och betrakta intervallet $[-1,1]$. Medelvärdessatsen kan ej användas i detta fall. Varför?

Lösning: $f'(x) = \operatorname{sgn} x$ som är odefinierad i $x=0 \in (-1,1)$. Alltså är inte alla antaganden i medelvärdessatsen uppfyllda så den kan ej tillämpas.



Exempel: Visa att $(1+x)^{1/3} < 1 + \frac{x}{3}$, $x>0$.

Lösning:
$$(1+x)^{1/3} < 1 + \frac{x}{3} \underset{[x>0]}{\Leftrightarrow} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x} < \frac{1}{3} \quad (*)$$

Låt $f(x) = (1+x)^{1/3}$, då fås enligt MVS

$$\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) = \frac{1}{3}(1+c)^{-2/3} < \frac{1}{3}$$

för något $c \in (0,x)$. Detta är precis $(*)$.

Växande och avtagande funktioner

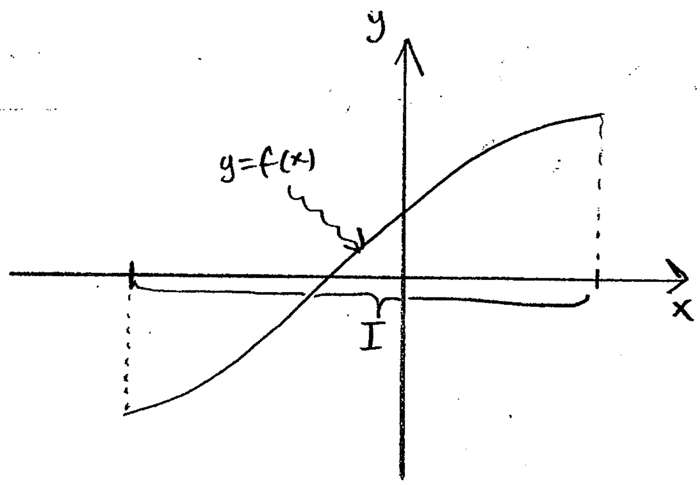
Definition: Antag att f definierad på intervall I och att $x_1, x_2 \in I$. Då gäller

(a) Om $f(x_2) > f(x_1)$ då $x_2 > x_1$ så är f växande på I

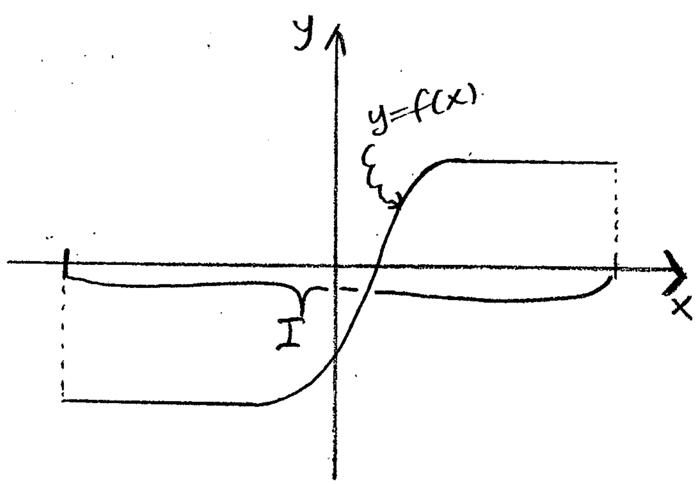
(b) Om $f(x_2) < f(x_1)$ då $x_2 > x_1$ så är f avtagande på I

(c) Om $f(x_2) \geq f(x_1)$ då $x_2 > x_1$ så är f ickeavtagande på I

(d) Om $f(x_2) \leq f(x_1)$ då $x_2 > x_1$ så är f ickeväxande på I



f växande på I



f ickeavtagande på I

Sats: Låt J vara ett öppet intervall och låt I vara intervall som innehåller J samt möjligen ena eller båda J:s ändpunkter. Antag f är kontinuerlig på I och deriverbar på J. Då gäller att:

(a) $f'(x) > 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ växande på I

(b) $f'(x) < 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ avtagande på I

(c) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ ickeavtagande på I

(d) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f$ ickeväxande på I

Bevis: Låt $x_1, x_2 \in I$ s.a. $x_2 > x_1$.

MVS $\Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) \subset J$ sådant att

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Detta ger att (eftersom $x_2 - x_1 > 0$)

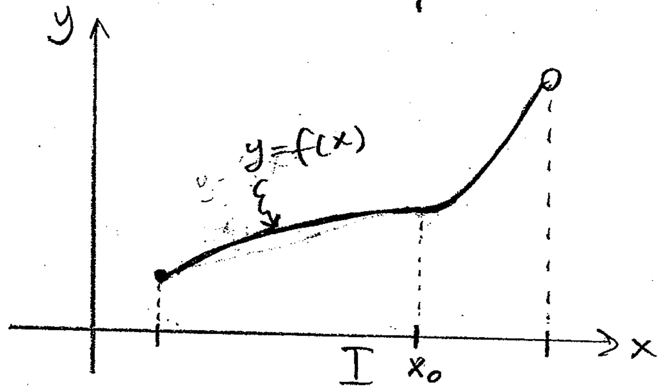
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ om } f'(c) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

(a) $f'(x) > 0 \ \forall x \in J \Rightarrow f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

d.v.s. f växande på I.

P.s.s. för (b), (c) & (d) $\square$

OBS: $f'(x) \geq 0$ på J ger växande f på I om $f'(x) = 0$ bara i isolerade punkter.



f växande trots att $f'(x_0) = 0$

Exempel: $f(x) = e^x - x$.

Var är f växande? Avtagande?

Lösning: $f'(x) = e^x - 1$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{om } x > 0 \\ = 0 & \text{om } x = 0 \quad \text{(isolerad punkt)} \\ < 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f \begin{cases} \text{växande på } [0, \infty) \\ \text{avtagande på } (-\infty, 0] \end{cases}$$

Sats: f kontinuerlig på I och $f'(x) = 0$ i varje inre punkt till I

$\Longrightarrow$ f är konstant på I

Bevis: Använd medelvärdessatsen; se boken. $\square$

För att bevisa medelvärdessatsen behöver vi först formulera och bevisa två satser.

Sats: Om f är definierad på (a,b) och antar ett maximum- eller minimumvärde i $c \in (a,b)$ och om $f'(c)$ existerar så gäller det att $f'(c)=0$.

Bevis: Antag f har maximum i c.
(Beviset är snarlikt för minimum i c.)

$$\Longrightarrow \quad f(x)-f(c) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\begin{cases} x \in (c,b) \underset{[x-c>0]}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{x \to c+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \\ x \in (a,c) \underset{[x-c<0]}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{x \to c-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \end{cases}$$

(Ty $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$.)

Vi har alltså $0 \leq f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c)=0$ $\square$

Sats: (Rolles sats) Antag g kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b).
Om $g(a)=g(b)$ så finns då $c \in (a,b)$ sådant att $g'(c)=0$.

Bevis: Antag $g(x)=g(a)=g(b)$ $\forall x \in [a,b]$, då måste $g'(c)=0$ $\forall x \in (a,b)$.
Antag $g(x_0) \neq g(a)=g(b)$ för något $x_0 \in (a,b)$.
Antag $g(x_0) < g(a)=g(b)$. $(g(x_0) > g(a)=g(b)$

finns utfört i boken.)

Enligt satsen om största och minsta värde måste g p.g.a. kontinuitet ha ett minimumvärde $g(c)$ i $c \in [a,b]$.

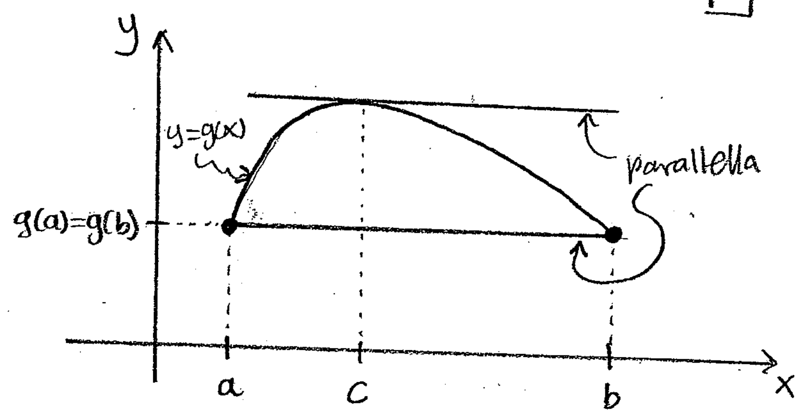
$$g(c) \leq g(x_0) < g(a) = g(b) \Rightarrow c \neq a, b,$$

d.v.s. $c \in (a,b)$.

Enligt antagandet finns $g'(c)$ ty c ligger i det inre av intervallet. Från förra satsen vet vi då att $g'(c) = 0$. $\square$

Betydelsen av Rolles sats:

(Notera att Rolles sats är ett specialfall av MVS.)



Bevis av MVS:

Låt f uppfylla antagandena i medelvärdessatsen, d.v.s. f kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b). Definiera

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) \quad (*)$$

på $[a,b]$. Uppenbarligen är g kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b). Dessutom gäller $g(a) = g(b)$. Rolles sats är tillämpbar för g på $[a,b]$

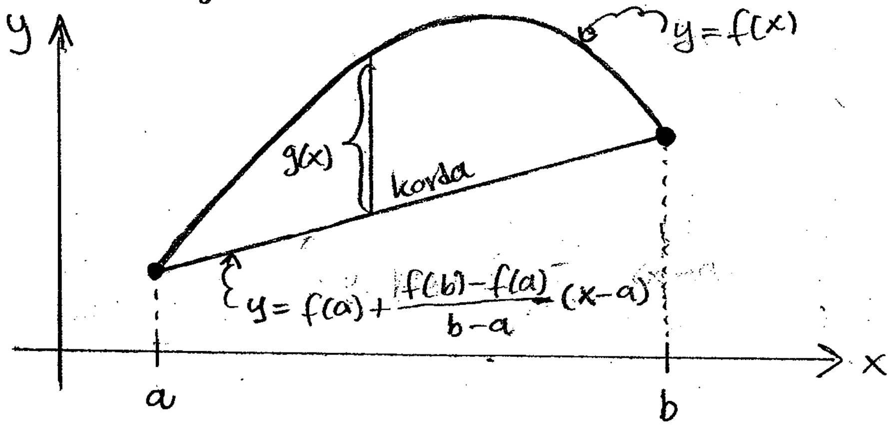
$$\Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \text{ s.a. } g'(c) = 0$$

d.v.s. $$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

enligt (*). Vi har därmed

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \qquad \square$$

Notera att $g(x)$ är avståndet mellan $f(x)$ och kordan som sammanbinder ändpunkterna till f:s graf. Se figur nedan:



Sats: (Generaliserade MVS)

Antag att f, g kontinuerliga på $[a,b]$ och deriverbara på (a,b) samt att $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b)$. Då finns $c \in (a,b)$ sådant att

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (*)$$

Bevis: Antag $g(b)-g(a) = 0 \Leftrightarrow g(b) = g(a)$. Då måste enligt Rolles sats $g'(c_0) = 0$ f.n. $c_0 \in (a,b)$. Detta är en motsägelse ty $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, så $g(b) - g(a) \neq 0$. Nämnarna i (*) är garanterat nollskilda så (*) är väldefinierat.

Bilda funktionen

$$h(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$$

på $[a,b]$. Det gäller att $h(a)=h(b)$ $(=0)$ så enligt Rolles sats finns $c \in (a,b)$ sådant att $h'(c)=0$, d.v.s.

$$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$$

eller

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

vilket vi konstaterat är väldefinierat. $\square$