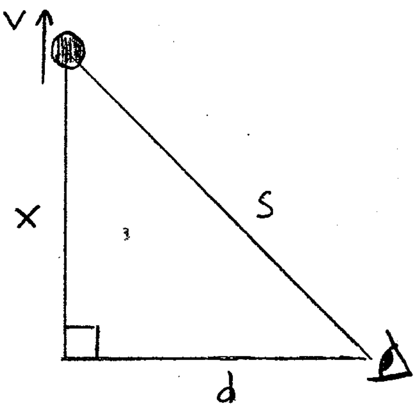
FÖRELÄSNING 4

Kopplade hastigheter

Ofta har man situationer där flera matematiska storheter ändras med tiden på ett kopplat sätt via ekvationer så att om man vet några hastigheter så kan man beräkna de övriga. Hastigheterna kan vara sinsemellan olika typer, här t.ex. längd/tid, area/tid, volym/tid, massa/tid, vinkel/tid, kostnad/tid etc.

Exempel: En luftballong stiger med hastigheten 10 km/h från en punkt 500 m från en observatör. Med vilken fart avlägsnar sig luftballongen observatören efter 6 min?

Lösning: Skiss:



d = avstånd startpunkt — observatör = 500 m

x = ballongens höjd

s = avstånd ballong — observatör

v = ballongens stigningshastighet = 10 km/h

Detta är situationen vid tiden t. Vi söker $\frac{ds}{dt}$.

Pythagoras: $s^2 = x^2 + d^2$ (*)

Derivera m.a.p. t: $2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$$\Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt}$$

Vi vet $\frac{dx}{dt} = v = 10$ km/h

Dessutom gäller $x = vt = 10 \text{ km/h} \cdot 6 \text{ min} =$

$$= 10 \text{ km/h} \cdot \frac{1}{10} \text{ h} = 1 \text{ km}$$

Ur (*) fås $s^2 = (1 \text{ km})^2 + (500 \text{ m})^2 = [500 \text{ m} = \frac{1}{2} \text{ km}]$

$$= 1 \text{ km}^2 + \frac{1}{4} \text{ km}^2 =$$

$$= \frac{5}{4} \text{ km}^2$$

$$\Longrightarrow s = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ km}$$

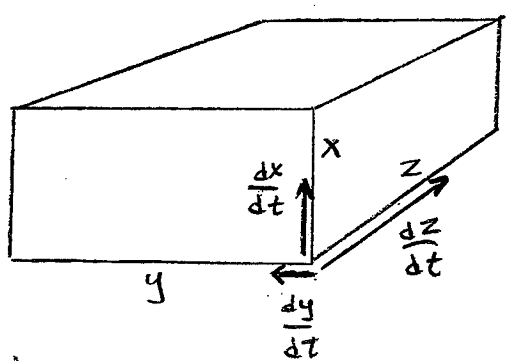
Detta ger $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{5}/2} 10 = \frac{20}{\sqrt{5}} \approx 8.9$ km/h

Exempel: Antag att man har en sockerbit i form av ett rätblock på $1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ som äts upp av en myrkoloni så att sidorna minskar med en hastighet om 2 mm/dygn, 1 mm/dygn resp. 4 mm/dygn. Hur mycket minskar volymen vid detta tillfälle?

Lösning: Sidlängderna vid tiden t kallar vi x, y resp. z.

Volymen V är då

$$V = xyz$$



$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt} yz + x \frac{dy}{dt} z + xy \frac{dz}{dt} =$$

$$= (-2 \text{ mm/dygn}) \cdot 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} \cdot (-1 \text{ mm/dygn}) \cdot 2 \text{ cm}$$

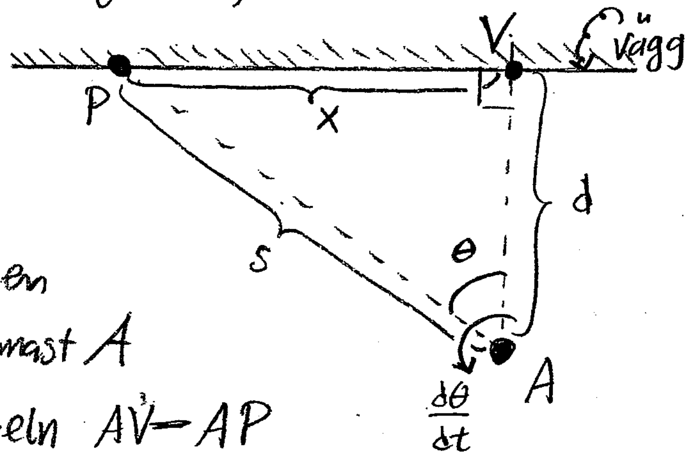
$$+ 1 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot (-4 \text{ mm/dygn}) =$$

$$= -8\ \text{mm}\cdot\text{cm}^2/\text{dygn} - 2\ \text{mm}\cdot\text{cm}^2/\text{dygn} - 8\ \text{mm}\cdot\text{cm}^2/\text{dygn}$$
$$= -18\ \text{mm}\cdot\text{cm}^2/\text{dygn} = -1.8\ \text{cm}^3/\text{dygn}$$

d.v.s. sockerbitens volym minskar med $1.8\ \text{cm}^3/\text{dygn}$.

<u>Exempel:</u> Anna lyser med en ficklampa på en vägg då hon snurrar runt i en kontorsstol. Stolen snurrar 3 varv/sekund och kontorsstolen står 2 meter från väggen. Hur snabbt rör sig den upplysta punkten då den är 4 meter från Anna (som håller ficklampan parallellt med golvet)?

<u>Lösning:</u> Skiss ovanifrån:



P: Upplyst punkt

A: Anna i kontorsstolen

V: Punkt på vägg närmast A

d:	2 m	θ: Vinkeln AV—AP
s:	4 m	$\frac{d\theta}{dt}$: Rotationshastighet

Vi söker $\frac{dx}{dt}$.

Vi har $\tan\theta = \frac{x}{d} \Leftrightarrow x = d\tan\theta$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = d\frac{d}{dt}(\tan\theta) = d\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Här är $\frac{d\theta}{dt} = 3\ \text{varv/sek} = 3\cdot 2\pi\ \text{rad/sek} =$
$= 6\pi\ \text{rad/sek}$.

$\sin^2\theta$ fås enligt: $\cos\theta = \frac{d}{s} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

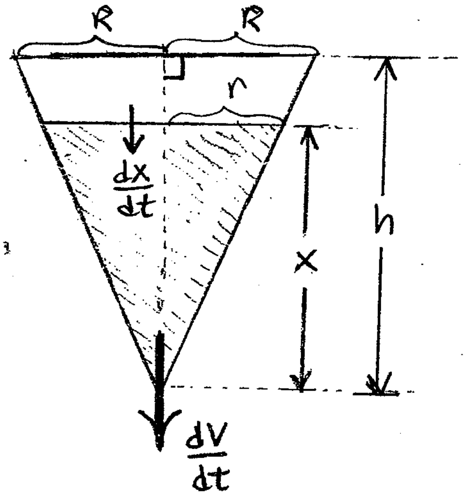
så att $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Detta ger $\frac{dx}{dt} = 2\cdot\frac{1}{3/4}\cdot 6\pi = \frac{8}{3}\cdot 6\pi =$

$= 8\cdot 2\pi = 16\pi$ m/s $=$

$= 3.6\cdot 16\pi$ km/h ≈ 181 km/h

<u>Exempel:</u> Örjan håller i en läckande glasstrut formad som en upp-och-nedvänd kon med höjden 12 cm och toppradien 4 cm.
Då djupet på den smältande glassen är 6 cm läcker den ut med hastigheten 2 cm³/min. Hur snabbt sjunker glassnivån i struten vid detta ögonblick?



<u>Lösning:</u> Skiss:

h: Struthöjd = 12 cm

R: Toppradie = 4 cm

$\frac{dV}{dt}$: Läckage = -2 cm³/min

x: Glassdjup = 6 cm

$\frac{dx}{dt}$: Glassnivåns sjunkhastighet, r = Glassradien

Vi söker $\frac{dx}{dt}$. (t är tiden.)

Volymen hos glassen är: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x$

Genom likformighet fås $\frac{r}{x} = \frac{R}{h} \Leftrightarrow r = \frac{R}{h}x$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{h}x\right)^2 x = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}x^3 =$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{4^2}{12^2} x^3 = \frac{1}{27}\pi x^3$$

Detta ger volymsändringshastigheten

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{27}\pi \cdot 3x^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{9}\pi x^2 \frac{dx}{dt}$$

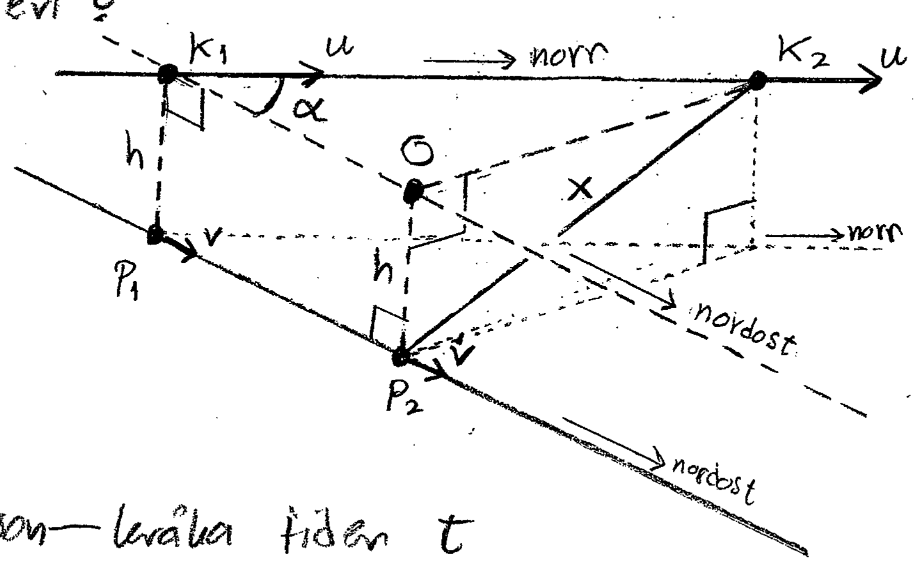
$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{9}{\pi}\frac{1}{x^2}\frac{dV}{dt} =$$

$$= \frac{9}{\pi}\cdot\frac{1}{6^2}\cdot(-2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot 2 = -\frac{1}{2\pi} \approx -0.16 \text{ cm/min}$$

d.v.s. glassnivån sjunker med 1.6 mm/min.

<u>Exempel:</u> En kråka flygande norrut med hastigheten 24 km/h passerar ovanför en gående person på väg i nordostlig riktning med hastigheten 6 km/h. Antag att kråkan flyger 50 m ovan (den plana) marken, med vilken hastighet avlägsnar sig kråkan personen 1 minut efter passagen?

<u>Lösning:</u> Skiss:



$u = 24$ km/h

$v = 6$ km/h

$\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$

$h = 50$ m

x = avstånd person—kråka tiden t

Vi söker $\frac{dx}{dt}$.

Pythagoras: $x^2 = h^2 + (OK_2)^2$

Cosinussatsen: $(OK_2)^2 = (K_1O)^2 + (K_1K_2)^2 - 2(K_1O)(K_1K_2)\cos\alpha$

$$\Rightarrow x^2 = h^2 + (K_1O)^2 + (K_1K_2)^2 - 2(K_1O)(K_1K_2)\cos\alpha =$$
$$= [\alpha = \tfrac{\pi}{4}] = h^2 + (K_1O)^2 + (K_1K_2)^2 - \sqrt{2}(K_1O)(K_1K_2) \quad (*)$$

Derivera m.a.p. t:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2(K_1O)\frac{d}{dt}(K_1O) + 2(K_1K_2)\frac{d}{dt}(K_1K_2) - \sqrt{2}\frac{d}{dt}(K_1O)(K_1K_2) - \sqrt{2}(K_1O)\frac{d}{dt}(K_1K_2)$$

$$= 2vt\cdot v + 2ut\cdot u - \sqrt{2}v\cdot ut - \sqrt{2}vt\cdot u =$$
$$= 2(u^2 + \sqrt{2}uv + v^2)t = \quad [1 \text{ min} = \tfrac{1}{60} \text{ h}]$$
$$= 2(24^2 + \sqrt{2}\cdot 24\cdot 6 + 6^2)\cdot\frac{1}{60} \text{ km}^2/\text{h} \approx$$
$$\approx 2\cdot 13.59 \text{ km}^2/\text{h}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} \approx \frac{1}{x}\cdot 13.59 \text{ km/h}$$

Men $x^2 \overset{(*)}{=} (0.05 \text{ km})^2 + (\tfrac{6}{60} \text{ km})^2 + (\tfrac{24}{60} \text{ km})^2 - \sqrt{2}\cdot\tfrac{6}{60}\cdot\tfrac{24}{60} \text{ km}^2 =$

$$= 0.05^2 + 0.1^2 + 0.4^2 - \sqrt{2}\cdot 0.04 \text{ km}^2 \approx$$
$$\approx 0.116 \text{ km}^2$$

$$\Rightarrow x \approx 0.340 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} \approx \frac{1}{0.340}\cdot 13.59 \text{ km/h} \approx 40.0 \text{ km/h}$$

Krokan och personen avlägsnar sig varandra med en hastighet av 40 km/h.

OBS: Läs gärna igenom "How to solve related-rates problems" i boken där det står hur man metodiskt löser problem rörande kopplade hastigheter.

Extremvärdesproblem

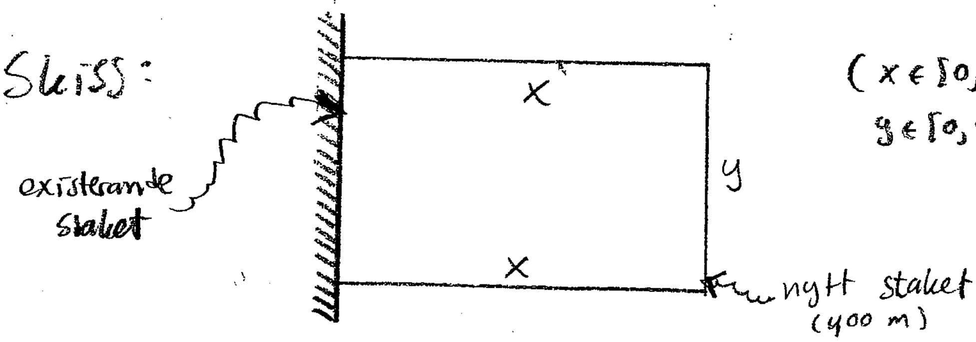
Vi kommer nu titta på diverse tillämpade optimeringsproblem som först måste översättas till en exakt matematisk form och sedan lösas med de metoder vi känner till:

> Om f är en funktion med definitionsmängd D_f så är $x_0 \in D_f$ en extrempunkt till f endast om
>
> (1) x_0 är en stationär punkt till f
>
> eller (2) x_0 är en ändpunkt till något intervall i definitionsmängden D_f
>
> eller (3) x_0 är en singulär punkt.

(stationär punkt: $f'(x_0)=0$
singulär punkt: $f'(x_0)$ ej definierad)

Exempel: Antag att vi vill bygga en rektangulär hästhage invid ett existerande staket. Om vi har 400 m staket att hägna in hagen med, hur stor area kan vi maximalt erhålla?

Lösning: Skiss:



($x \in [0, 200]$
$y \in [0, 400]$)

Arean blir då $A = xy$

Vi har 400 m staket: $2x + y = 400$

$$y = 400 - 2x$$

$$\Longrightarrow \quad A = x(400-2x), \quad x \in [0, 200]$$

Vi vet att maximum finns i en stationär punkt till $A(x)$ eller i någon ändpunkt till $D_A = [0, 200]$. (A saknar singulära punkter.)

$$A(0) = A(200) = 0$$

$$A'(x) = 1 \cdot (400-2x) + x(-2) =$$

$$= 400 - 2x - 2x = 4(100-x)$$

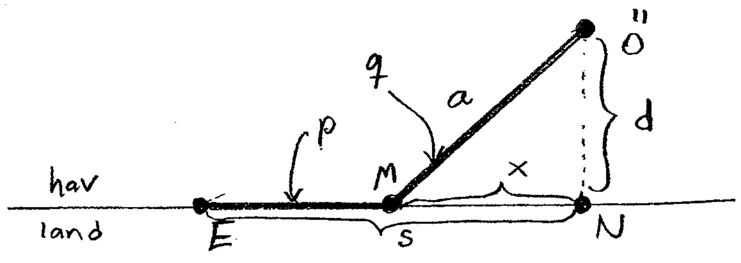
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 100 \text{ m}$$

$$A(100) = 100 \cdot (400 - 2 \cdot 100) = 100 \cdot 200 = 20\,000 \text{ m}^2$$

$\Longrightarrow$ Maximum uppnås för $x = 100$ m ($y = 200$ m) och maximala area är $20\,000 \text{ m}^2$.

<u>Exempel:</u> Antag att man ska förbinda en liten skärgårdsö 2 km från stranden med en elstation på stranden 5 km från den punkt på stranden som ligger närmast ön. Antag att elkabeln kostar 100 kr/m att dra under vattnet och bara 20 kr/m på land. Var ska kabeln tas emot på land för att minimera kostnaden?

<u>Lösning:</u> Skiss:



d : 2 km
s : 5 km
p : 20 kr/m
q : 100 kr/m
x : Avståndet mellan punkt N närmast ön och mottagningspunkten M
a : Kabellängden i vattnet

Vi har den totala kostnaden

$$T = p(5-x) + qa = [\text{Pythagoras}] =$$
$$= p(5-x) + q\sqrt{d^2+x^2} =$$
$$= (20\cdot 1000)(5-x) + (100\cdot 1000)\sqrt{2^2+x^2} =$$
$$= 20\,000\cdot(5-x) + 100\,000\sqrt{4+x^2}$$

Rimligen gäller definitionsmängden $D_T = [0,5] = [0,5]$.
Minimum fås för antingen ändpunkterna i D_T eller i stationära punkter i det inre av D_T.

$$T(0) = 20\,000\cdot(5-0) + 100\,000\sqrt{4+0^2} =$$
$$= 100\,000 + 200\,000 = 300\,000 \text{ kr}$$
$$T(5) = 20\,000\cdot(5-5) + 100\,000\sqrt{2^2+5^2} =$$
$$= 100\,000\sqrt{29} > 100\,000\sqrt{9} = 300\,000 \text{ kr} \quad (\text{ej min})$$

Stationära punkter:

$$T'(x) = -20\,000 + 100\,000\cdot\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} =$$
$$= -20\,000 + \frac{100\,000\,x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{20000}{\sqrt{4+x^2}}\left(5x - \sqrt{4+x^2}\right)$$
$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - \sqrt{4+x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 4 + x^2 \Leftrightarrow 24x^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (\pm)\frac{1}{\sqrt{6}} \quad (\in [0,5])$$

Test: $5 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \sqrt{4 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{6}} - \sqrt{4 + \frac{1}{6}} =$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{24+1}{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{6}} = 0, \text{ ok}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ är den stationära punkten

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 20\,000 \cdot \left(5 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 100\,000 \sqrt{4 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = [\text{enl. ovan}] =$$

$$= 20\,000 \cdot \left(5 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 100\,000 \frac{5}{\sqrt{6}} =$$

$$= 100\,000 + 80\,000 \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ kr}$$

Eftersom $\frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{5}{2}$ så måste

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) < 100\,000 + 80\,000 \cdot \frac{5}{2} = 300\,000 \text{ kr}$$

d.v.s. den minsta möjliga kostnaden fås för $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ km ≈ 0.41 km

<u>Exempel:</u> Vad är längden hos den kortaste stegen som kan ställas mot en vägg och över ett 8 m högt stängsel som befinner sig 1 m från väggen.

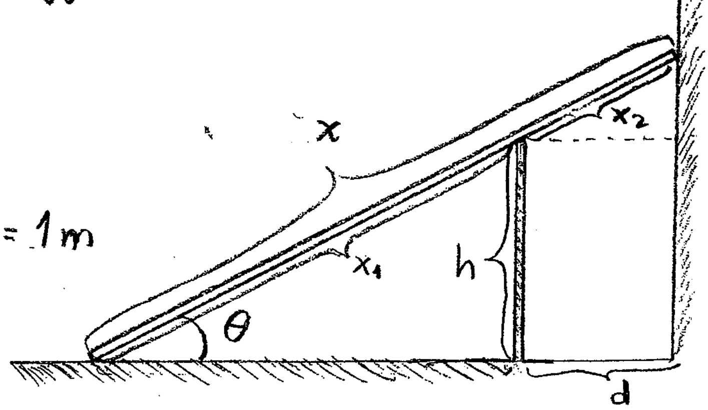
<u>Lösning:</u> Skiss:

h: stängselhöjd = 8 m

d: avstånd stängsel—vägg = 1 m

x: stegens längd

θ: stegens lutning



$$\frac{h}{x_1} = \sin\theta \;, \quad \frac{d}{x_2} = \cos\theta \quad \text{(likformighet)}$$

$$\Longrightarrow x = x_1 + x_2 = \frac{h}{\sin\theta} + \frac{d}{\cos\theta} = \frac{8}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

Notera att $D_x = (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\lim_{\theta \to 0+} x(\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} x(\theta) = \infty$$ och det faktum att singulära punkter saknas på D_x innebär att minimum finns bland stationära punkter i det inre av D_x.

(För öppna intervall, se Theorem 8 s. 237 i sjunde upplagan och Theorem 4 s. 220 i sjätte upplagan.)

Stationära punkter: i $(0, \frac{\pi}{2})$

$$x'(\theta) = -\frac{8}{\sin^2\theta} \cdot \cos\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot (-\sin\theta) =$$

$$= \frac{\sin^3\theta - 8\cos^3\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \quad \text{(nämnare } \neq 0 \text{ på } (0, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$x'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin^3\theta - 8\cos^3\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^3\theta = 8 \Leftrightarrow \tan\theta = 2$$

$$(\Leftrightarrow \theta = \arctan 2 \;, \text{ onödigt})$$

Detta θ ger minsta längd. Trigonometriska ettan ger:

$$\cos^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta + 1} = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}$$

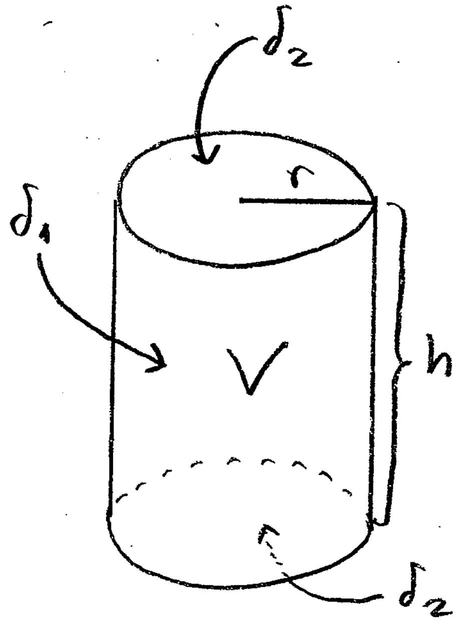
$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Då fås den minsta steglängden enligt

$$X = \frac{8}{\sqrt{4/5}} + \frac{1}{\sqrt{1/5}} = \frac{8\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5}\ \text{m} \approx 11.2\ \text{m}$$

Exempel: Antag att vi har en cylindriskt formad burk som ska rymma $1000\ \text{cm}^3$. Bestäm formen hos den lättaste tomma burken om botten och locket väger $100\ \text{mg/cm}^2$ och sidan $50\ \text{mg/cm}^2$.

Lösning: Skiss:



V = Volym = $1000\ \text{cm}^3$
δ_1 = täthet sida = $50\ \text{mg/cm}^2$
δ_2 = täthet botten/lock = $100\ \text{mg/cm}^2$
r = cylinderradie
h = cylinderhöjd

Volymen hos en cylinder är

$$V = \pi r^2 h \iff h = \frac{V}{\pi r^2} \quad (*)$$

Sidarean S_1 är $S_1 = 2\pi r h$

Botten-/lockarean S_2 är totalt $S_2 = 2\pi r^2$

$\Longrightarrow$ Totala vikten m är

$$m = \delta_1 S_1 + \delta_2 S_2 =$$
$$= 2\pi r h \delta_1 + 2\pi r^2 \delta_2 = [\text{Utnyttja } (*)] =$$
$$= 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} \delta_1 + 2\pi r^2 \delta_2 =$$
$$= \frac{2V\delta_1}{r} + 2\pi r^2 \delta_2 = [\text{Sätt in värden}] =$$
$$= \frac{2 \cdot 1000 \cdot 0.05}{r} + 2\pi r^2 \cdot 0.1 =$$

$$= \frac{100}{r} + \frac{\pi}{5} r^2 \quad g$$

Definitionsmängden är $D_m = (0, \infty)$.

$\lim_{r \to 0+} m(r) = \lim_{r \to \infty} m(r) = \infty$ och singulära punkter saknas innebär att minimum återfinns bland stationära punkter:

$$m'(r) = -\frac{100}{r^2} + \frac{2\pi}{5} r$$

$$m'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{100}{r^2} + \frac{2\pi}{5} r = 0$$

$$\frac{2\pi}{5} r^3 = 100$$

$$r = \left(\frac{250}{\pi}\right)^{1/3} \text{ cm}$$

$$\approx 4.30 \text{ cm}$$

$$\Longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \left(\frac{250}{\pi}\right)^{2/3}} = \frac{1000}{(250^2 \pi)^{1/3}}$$

$$= \frac{1000}{(62500\pi)^{1/3}} \text{ cm} \approx 17.21 \text{ cm}$$

d.v.s. den lättaste burken med volymen 1000 cm^3 har radien 4.3 cm och höjden 17.2 cm