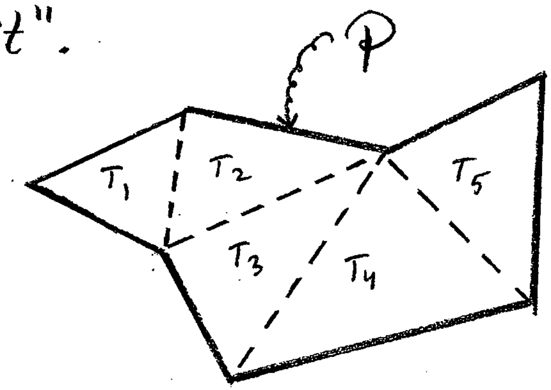
FÖRELÄSNING 5

Areor som gränsvärden av summor

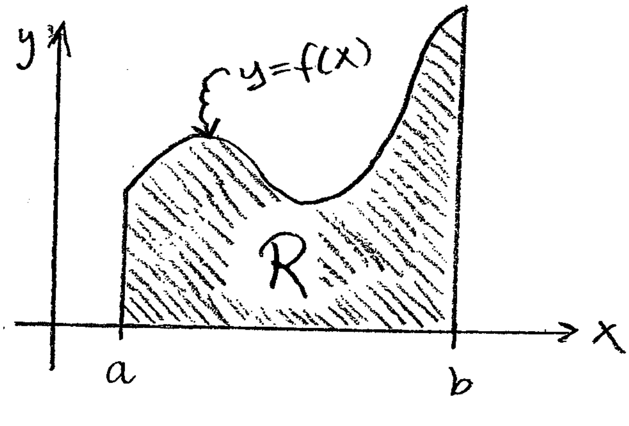
Med elementär matematik kan vi endast beräkna areor av polygoner, d.v.s. områden inneslutna av räta linjesegment. (Linjesegment = ändligt lång linje.) En polygon kan alltid betraktas som uppbyggd av trianglar och triangelarea-beräkning är "elementärt".



Polygon P = unionen av intilliggande trianglar $T_1, \dots, T_5$

Areaproblemet

Vi vill beräkna arean av ett område R definierat i figuren nedan:



f är en ickenegativ (d.v.s. $f(x) \geq 0$) och kontinuerlig funktion.

Dela in $[a,b]$ i delintervall $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ där

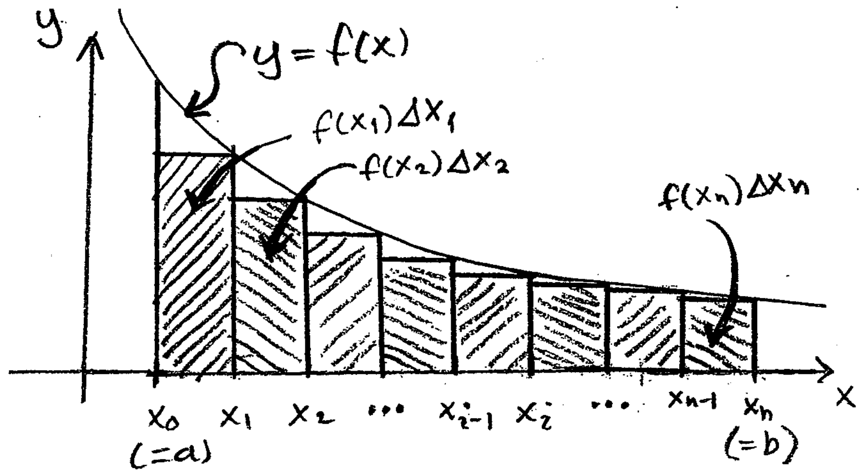
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Låt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, längd hos $[x_{i-1}, x_i]$.

Ovanför varje $[x_{i-1}, x_i]$ bygger vi en rektangel med höjden $f(x_i)$ och därmed area $f(x_i)\Delta x_i$. Summera areorna:

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Se figur:



S_n (den streckade arean) approximerar arean hos området R mellan graf och x-axel.

Fler rektanglar (större n) $\Rightarrow$ $\begin{cases} S_n \text{ ligger närmare} \\ \text{arean hos } R \text{ (d.v.s.} \\ \text{bättre areaapprox.)} \end{cases}$

Eller litet mer rigoröst,

$$\text{arean hos } R = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n$$

där $\max \Delta x_i \to 0$ garanterar att alla intervall är smala då n är stort. (Löst uttryckt.)

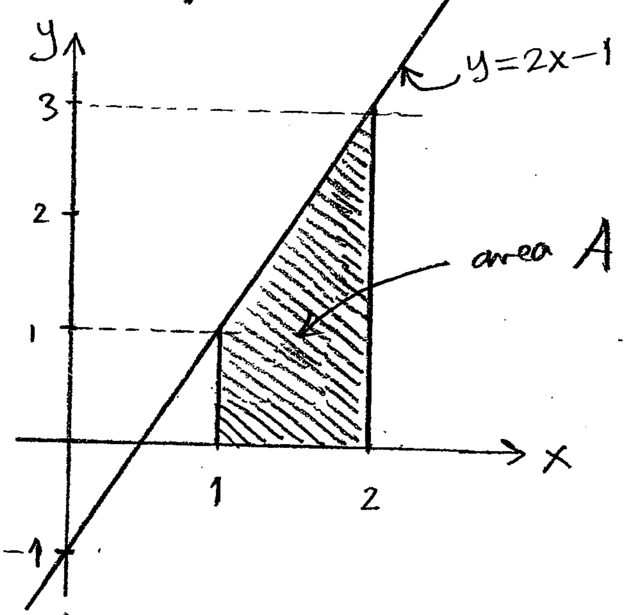
En typisk indelning av $[a,b]$ är delintervall med samma bredd $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ som ger punkterna

$$x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad i = 0,1,\dots,n$$

t.ex. $x_0 = a + \frac{0}{n}(b-a) = a + 0 = a$
$x_n = a + \frac{n}{n}(b-a) = a + (b-a) = b$ } Som väntat

<u>Exempel:</u> Bestäm arean A hos området under den räta linjen $y = 2x - 1$, ovan x-axeln och mellan $x = 1$ och $x = 2$.

<u>Lösning:</u> Området är streckat i figuren nedan:



Vi vet att

$$A = 1 \times 1 + \tfrac{1}{2}(1 \times 2) =$$

$$= 1 + 1 = 2$$

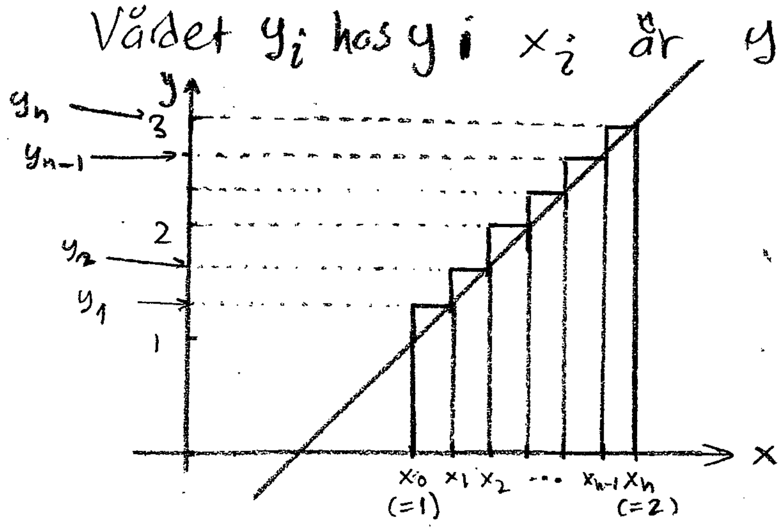
Vi kommer approximera arean med rektanglar istället.

Dela upp $[1,2]$ i n intervall $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ m. längd $\frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$: $x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{1}{n},\ x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \dots,$

$x_i = 1 + \frac{i}{n}, \dots,\ x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n},\ x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2$

Vädet y_i hos y i x_i är $y_i = 2x_i - 1 =$

$$= 2\left(1 + \frac{i}{n}\right) - 1 = 1 + \frac{2i}{n}$$



Totala arean hos rektanglarna:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{2i}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} 1 = 1+\dots+1 = n \\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \end{array}\right] = \frac{1}{n}\left(n + \frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 + \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

Detta ger arean (notera att $\max \Delta x_i \to 0$ uppfyllt)

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$$

som väntat.

<u>OBS:</u> Vi utnyttjade $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Fler användbara summor (bevis i avsn. 5.1 i boken):

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = \frac{r^n - r}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

Den bestämda integralen

Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$.
Låt $x_0, x_1, \dots, x_n$ uppfylla $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
Inför mängden $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. P kallas för <u>partition</u> av $[a,b]$ och ger n delintervall $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.
Längden hos i:te delintervallet: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
(d.v.s. $[x_{i-1}, x_i]$)

Finheten i uppdelningen, "partitioneringen", av $[a,b]$ ges av maximala delintervallängden:

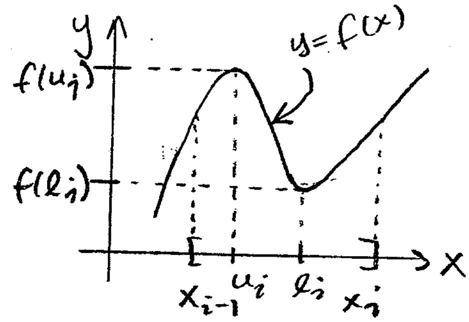
$$\|P\| = \max_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$$

($\|P\|$ är partitionens <u>norm</u>, d.v.s. grad av finhet.)

Satsen om minsta & största värde ger att det finns $l_i, u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ så att

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i)$$

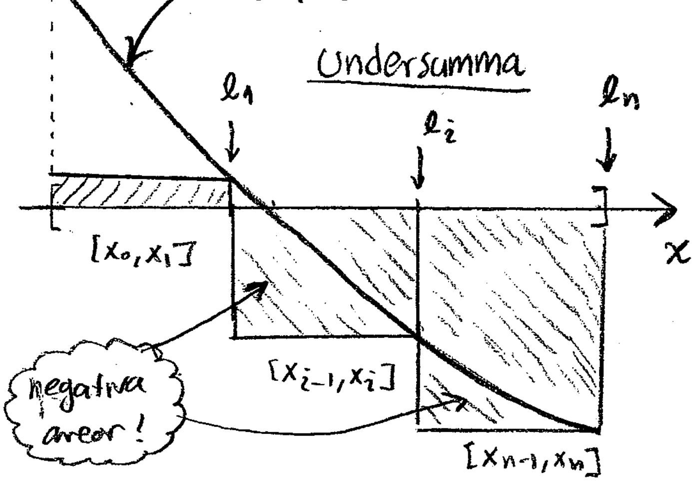
för alla $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

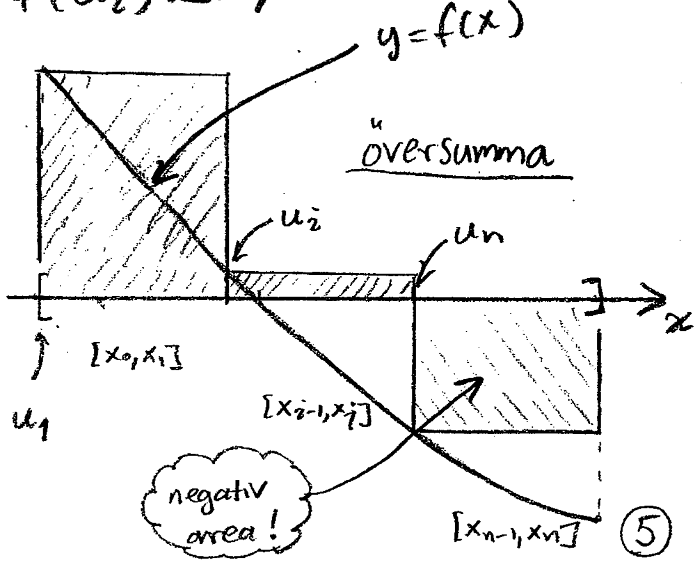


<u>Definition:</u> Undersumman $L(f,P)$ och översumman $U(f,P)$ för funktionen f och partitionen P av $[a,b]$ definieras genom:

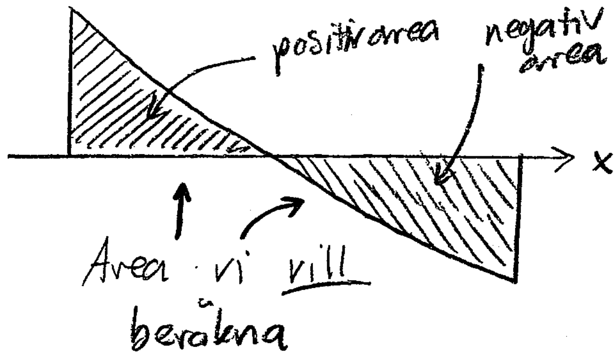
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$





Vi ser att $L(f,P)$ typiskt kommer ge för liten area och $U(f,P)$ för stor area. (Areor under x-axeln räknas negativa.)



<u>Exempel:</u> Låt $f(x) = 2x-1$. Beräkna under- och översumma på $[1,2]$ med partitionen

$$P = \{\underset{x_0}{1},\ \underset{x_1}{1.25},\ \underset{x_2}{1.5},\ \underset{x_3}{1.75},\ \underset{x_4}{2}\}$$

<u>Lösning:</u> f växande $\Rightarrow$ $l_i = x_{i-1}$, $u_i = x_i$

För alla intervall gäller $\Delta x_i = 0.25$, så att

$$L(f,P) = f(x_0)\Delta x_1 + \dots + f(x_3)\Delta x_4 =$$
$$= \big((2x_0-1)+(2x_1-1)+\dots+(2x_3-1)\big)\cdot 0.25$$
$$= \big(2(x_0+\dots+x_3)-4\big)\cdot 0.25 =$$
$$= \big(2(1+1.25+\dots+1.75)-4\big)\cdot 0.25 =$$
$$= (2\cdot 5.5-4)\cdot 0.25 = \frac{11}{4}-1 = \frac{7}{4}$$

$$U(f,P) = f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_4)\Delta x_4 = \dots =$$
$$= \big(2(1.25+1.5+\dots+2)-4\big)\cdot 0.25 =$$
$$= (2\cdot 6.5-4)\cdot 0.25 = \frac{13}{4}-1 = \frac{9}{4}$$

Notera att $L(f,P) \leq U(f,P)$ som väntat.

(ty $\frac{7}{4} < \frac{9}{4}$)

Antag att vi har partition P_1. Låt P_2 vara en annan partition av $[a,b]$ sådan att alla punkter i P_1 också finns i P_2. (P_2 kan ha fler punkter än P_1.) Då kallas P_2 en <u>förfining</u> av P_1. Då gäller:

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$$

Detta för att fler punkter i partition ger större undersumma och mindre översumma.

Låt P_1, P_2 vara två partitioner av $[a,b]$. Antag att P är förfining av både P_1 och P_2. Då måste det gälla att

$$L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2)$$

P godtycklig förfining, så vi har

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$$

för alla P_1, P_2: Varje undersumma är mindre än eller lika med varje översumma.

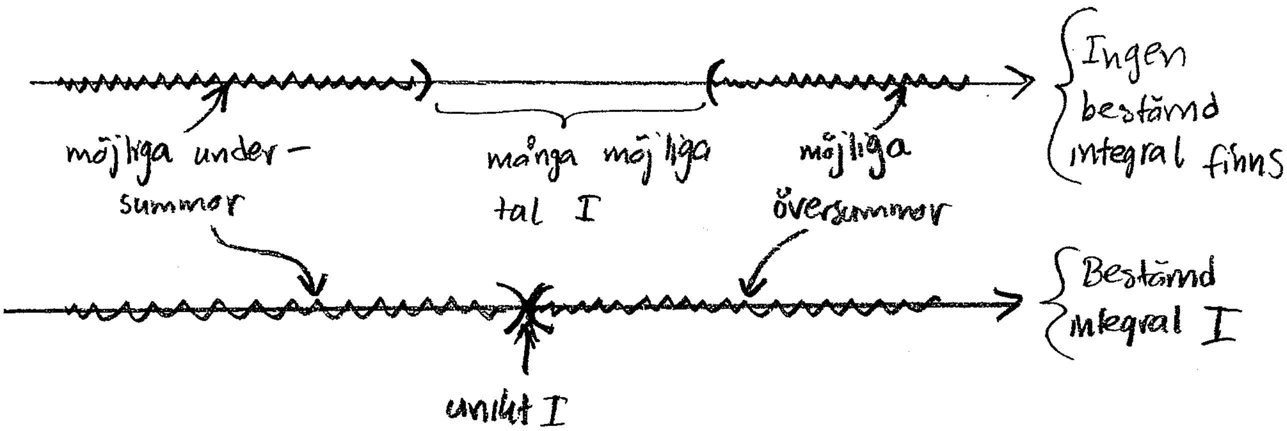
Vi drar slutsatsen att det finns minst ett tal I sådant att

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$$

för alla partitioner P av $[a,b]$.

Om I unikt så kallas I för

den <u>bestämda integralen</u> av f på $[a,b]$.



<u>Definition</u>: Antag att det finns unikt I sådant att

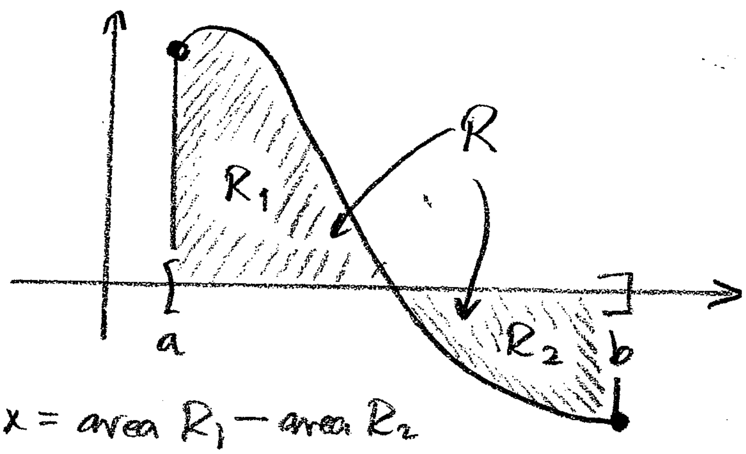
$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P)$$

för alla partitioner P. Då är f integrerbar på $[a,b]$ och I är den bestämda integralen av f på $[a,b]$. Vi skriver

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Notera</u>: "$\int_a^b$" motsvarar "$\sum_{i=1}^{n}$" och "dx" motsvarar "Δx_i"

Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ är alltså arean av området R där man tar hänsyn till f:s tecken.



area $R = \int_a^b f(x)\,dx =$ area $R_1 -$ area R_2

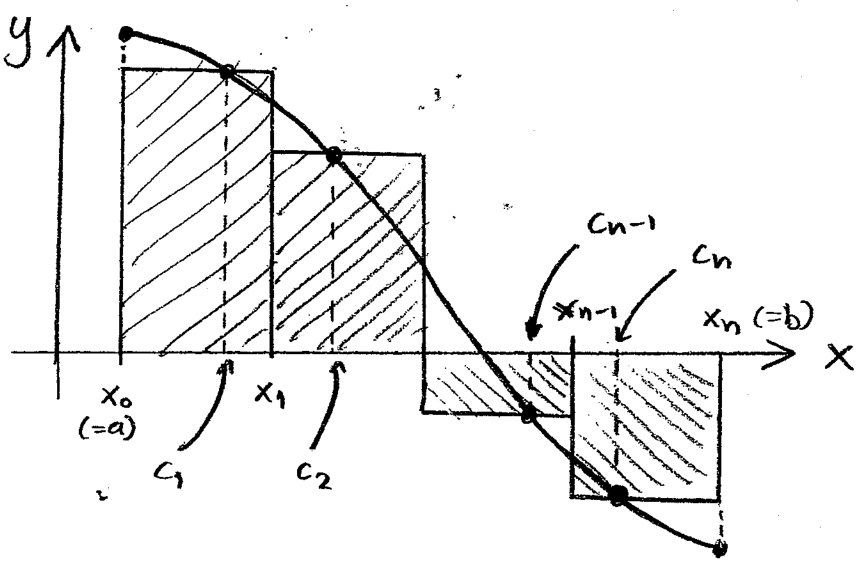
Riemannsummor: Hur räknar man ut I, d.v.s. $\int_a^b f(x)dx$, om f är integrabel?

Låt $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ vara partition av $[a,b]$. Välj ut $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ för varje $i = 1, 2, \dots, n$. Låt $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ beteckna mängden av sådana valda delintervallpunkter.

Definition: Summan

$$R(f, P, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

kallas Riemannsumman av f på $[a,b]$ med avseende på partition P och valda delintervallpunkter c.



Det gäller att

$$L(f, P) \le R(f, P, c) \le U(f, P, c)$$

för alla partitioner P och delintervallpunkter c.

Om f är integrerbar på $[a,b]$ så måste vi ha

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|P\|\to 0}} R(f,P,c) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sats: Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$.

(Denna sats bevisas i Appendix IV i boken, men beviset ingår ej i kursen.)

Egenskaper hos den bestämda integralen

Utvidga definitionen av bestämd integral $\int_a^b f(x)\,dx$ så att det även tillåts att $a=b$ och $a>b$. (Motsvarar partitioner med intervallängder som är noll resp. negativa.)

Sats: Antag f,g integrabla på ett intervall som innehåller a,b,c. Då gäller:

(a) $\int_a^a f(x) = 0$

(b) $\int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)$

(c) $\int_a^b (Af(x)+Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$

(d) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

(e) $a \leq b$, $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(f) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ om $a \leq b$

(g) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ om f udda (d.v.s. $f(-x) = -f(x)$)

(h) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ om f jämn (d.v.s. $f(-x) = f(x)$)

Exempel: $\int_{-1}^{1}(2x-1)\,dx = \int_{-1}^{1}(2x + (-1)\cdot 1)\,dx = $ [anv. (c)] $=$

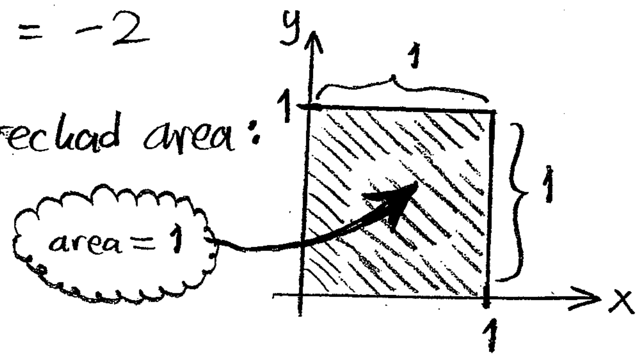
$$= 2\int_{-1}^{1} x\,dx + (-1)\int_{-1}^{1} 1\,dx =$$

$= [\,f(x) = x$ udda, $g(x) = 1$ jämn$\,] =$

$$= 2\cdot 0 + (-1)\cdot 2\int_0^1 1\,dx = -2\int_0^1 1\,dx =$$

$$= (-2)\cdot 1 = -2$$

ty $\int_0^1 1\,dx$ streckad area:



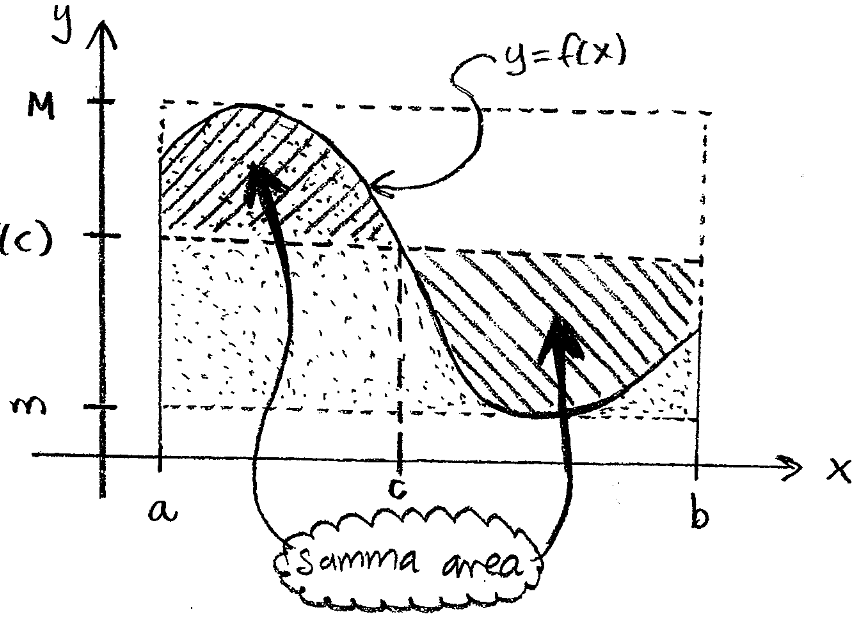
Medelvärdessatsen för integraler:

Om f är kontinuerlig på $[a,b]$, så existerar en punkt $c \in [a,b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

Illustration:

(m och M förklaras i beviset)



Bevis: Satsen om största och minsta värde ger att minsta värde $m = f(\ell)$ och största värde $M = f(u)$ antas för några punkter $\ell, u \in [a,b]$.

Alltså, $m = f(\ell) \leq f(x) \leq f(u) = M$ (se fig. ovan)

Introducera en partition $P = \{x_0, x_1\}$ av $[a,b]$ där $x_0 = a$, $x_1 = b$. (P definierar bara ett (del-)intervall.) Vi vet att f integrabel på $[a,b]$ ty f kontinuerlig på $[a,b]$.

Då finns alltså integral $\int_a^b f(x)\,dx$ och per definition är detta tal instängt mellan under- och översummor. Speciellt gäller:

$$m(b-a) = L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,P) = M(b-a)$$

$$\Rightarrow f(\ell) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(u) \quad (*)$$

Enligt satsen om mellanliggande värde tillämpat på $[l,u] \subset [a,b]$ (eller $[u,l] \subset [a,b]$ om $l > u$) så antas för något $c \in [l,u]$ (eller $[u,l]$)

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ty (*). Alltså, för något $c \in [a,b]$ gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c) \qquad \square$$

<u>Vad satsen säger:</u> $\int_a^b f(x)dx$ är lika med arean hos rektangel med basen $b-a$ (längd på $[a,b]$) och höjden $f(c)$ f.n. $c \in [a,b]$.

<u>Definition:</u> Om f är integrabel på $[a,b]$ så sägs

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

vara <u>medelvärdet</u> till f på $[a,b]$.

<u>Bestämda integraler av styckvis kontinuerliga funktioner:</u>

En styckvis kontinuerlig funktion $f(x)$ på $[a,b]$ är en funktion som kan skrivas på formen

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (c_0, c_1) \\ f_2(x), & x \in (c_1, c_2) \\ \vdots & \\ f_n(x), & x \in (c_{n-1}, c_n) \end{cases}$$

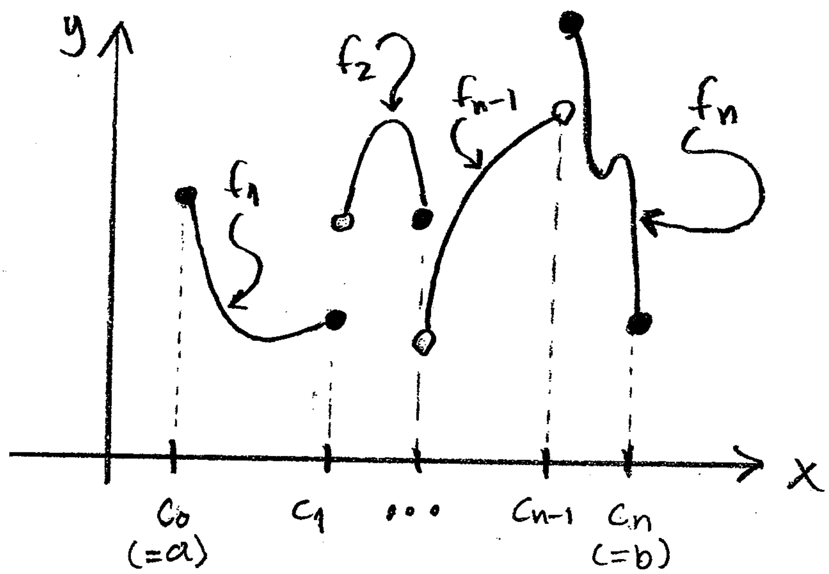
på $(c_0,c_1) \cup (c_1,c_2) \cup \dots \cup (c_{n-1},c_n)$

där $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$ och

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ kontinuerliga på $[c_0, c_1], [c_1, c_2], \ldots$ resp. $[c_{n-1}, c_n]$.

<u>Definition:</u> Om f är styckvis kontinuerlig på $[a,b]$ uttryckt enligt ovan så definierar vi

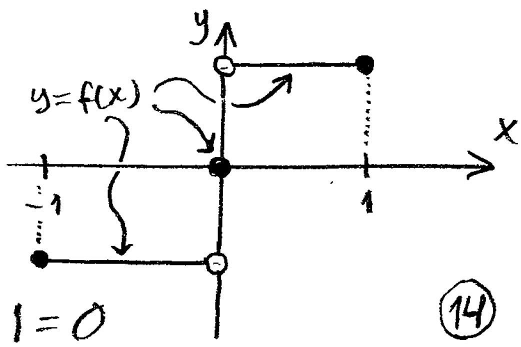
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x)\,dx$$



Funktionen f på $[a,b]$ är styckvis kontinuerlig (fallerar endast i $c_0, c_1, \ldots, c_n$)

högerkont. gäller dock. vänsterkont. gäller dock

<u>Exempel:</u> $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0, & x = \end{cases}$



f är styckvis kontinuerlig på $[-1,1]$,

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int_0^1 1\,dx = (-1) + 1 = 0$