FÖRELÄSNING 6

Analysens huvudsats

I praktiken beräknar man integraler m.h.a. primitiva funktioner snarare än gränsvärden av Riemannsummor som vi tittade på förut.
Detta påstående är analysens huvudsats:

Sats: (Analysens huvudsats)
Antag att f är kontinuerlig på intervallet I som innehåller punkten a. Då gäller:

(I) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, d.v.s. $\int_a^x f(t)\,dt$ är en primitiv funktion till f.

(II) Om $G(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ på I, d.v.s. $G'(x) = f(x)$, så gäller för alla $b \in I$ att $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

Bevis: (I) Låt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Derivatans definition ger då:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = F'(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right) =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{räkneregel} \\ \text{för integraler}\end{bmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{medelvärdes-} \\ \text{satsen för} \\ \text{integraler}\end{bmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big((x+h)-x\big) f(c) = \lim_{h\to 0} f(c) \; (*)$$

för något $c \in [x, x+h]$. Eftersom $h \to 0$ så måste $c \to x$ ty $x+h \to x$. Därför fås

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$ eftersom

f är kontinuerlig.

(II) Vi har $G'(x) = f(x)$. Eftersom också $F'(x) = f(x)$ så gäller $G'(x) - F'(x) = 0$ d.v.s. $\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = 0$. Då vet vi att $F(x) - G(x) = C$ på I.

$$\Longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt = F(x) = G(x) + C \quad (**)$$

Med $x = a$ fås att $(**)$ blir

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + C \Rightarrow C = -G(a)$$

Med $x = b$ fås då att $(**)$ blir

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + (-G(a)) = G(b) - G(a)$$

d.v.s. $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

ty integrationsvariabeln är godtycklig. $\square$

__Definition:__ Analysens huvudsats motiverar följande symbols införande:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Symbolen $\Big|_a^b$ kallas __insättningstecknet.__

__Notera:__ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b$ där $\int f(x)\,dx$ är den obestämda integralen (d.v.s. den primitiva funktionen).

Den primitiva funktionen är inte entydigt, man kan addera vilken konstant man vill och fortfarande få derivatan $f(x)$. $\left(\frac{d}{dx}(F(x)+C) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)\right)$

Men i insättningsformeln kan vilken primitiv funktion som helst användas.

prim. fkner

__Exempel:__ $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)\,dx = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2,\ \frac{d}{dx}(x) = 1\right] =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_1^2 =$$

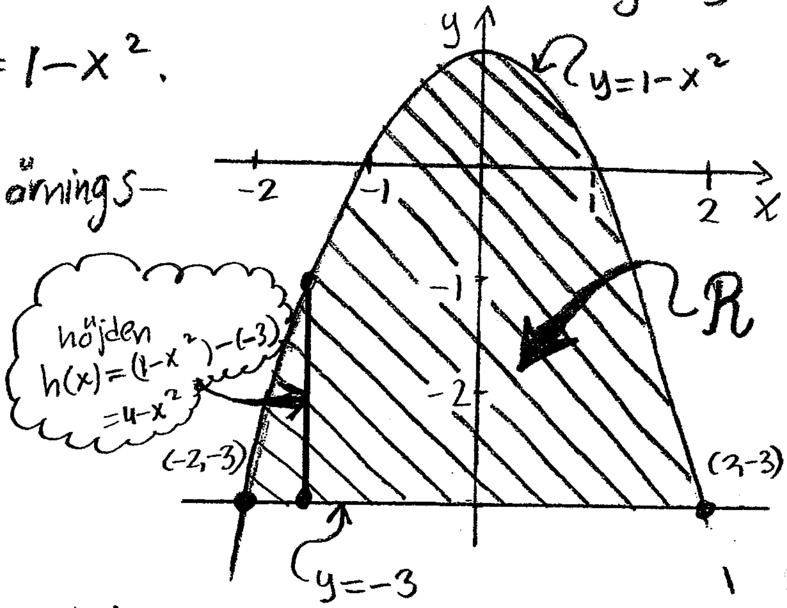
$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Vi hade kunnat använda t.ex. $\frac{1}{3}x^3 - x + 1376$ istället för $\frac{1}{3}x^3 - x$ som primitiv funktion till $x^2 - 1$ ty man kommer få termerna $\underbrace{1376 - 1376}_{=0}$ utöver de i exemplet efter insättning.

Exempel: Beräkna arean av området R ovan $y=-3$ och nedan $y=1-x^2$.

Lösning: Kurvornas skärningspunkter ges av:



$$1-x^2 = -3$$
$$4 = x^2$$
$$\pm 2 = x$$

d.v.s. $(x,y)=(\pm 2,-3)$. Vi ska alltså beräkna

$$\text{area } R = \int_{-2}^{2} h(x)\,dx$$

där $h(x) = (1-x^2)-(-3) = 4-x^2$ är höjden på R i punkten x. Vi får

$$\text{area } R = \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx = [4-x^2 \text{ jämn}] =$$
$$= 2\int_{0}^{2} (4-x^2)\,dx = 2\left(4\int_{0}^{2} 1\,dx - \int_{0}^{2} x^2\,dx\right) =$$
$$= 2\left(4\cdot 2 - \frac{1}{3}2^3\right) = 2\left(8-\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ a.e.}$$

Analysens huvudsats tillsammans med kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

Exempel: Låt $F(x)=\int_{1}^{x^2} \cos 2t\,dt$. Beräkna $F'(x)$.

Lösning: $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{1}^{x^2} \cos 2t\,dt =$

$$=(\cos 2x^2)\cdot 2x - (\cos(2\cdot 1))\cdot 0 = 2x\cos 2x^2$$

Integrationsmetoder

Vi går nu in på metoder att hitta primitiv funktion. Man bör utantill kunna de s.k. elementära integralerna, d.v.s.

$$\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^r + C \qquad (r \neq -1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

etc. När inte dessa räcker till måste man använda någon lämplig integrationsmetod.

Substitutionsmetoden:

Låt f och g bilda en deriverbar sammansatt funktion $f(g(x))$. Enligt kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx} f(g(x)) = \int f'(g(x))\, g'(x)\, dx$$

d.v.s. $$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + C \qquad (*)$$

där C är en integrationskonstant.

Låt $u = g(x)$. Då fås $\frac{du}{dx} = g'(x)$, vilket vi suggestivt kan skriva på s.k. differential-form $du = g'(x)dx$. Då blir $(*)$

$$\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f'(u)\, du =$$
$$= f(u) + C = f(g(x)) + C$$

Man går alltså från variabeln x till u och efter integration tillbaka till x.
Detta är substitutionsmetoden (x subst. av u).

Exempel: Beräkna $\int \frac{4x+6}{x^2+3x}\,dx$.

Lösning: $\int \frac{4x+6}{x^2+3x}\,dx = \int \frac{2}{x^2+3x}(2x+3)\,dx =$

$$= \left[u = x^2+3x \Rightarrow du = \frac{d}{dx}(x^2+3x)\,dx = (2x+3)\,dx \right]$$

$$= \int \frac{2}{u}\,du = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C =$$

$$= 2\ln|x^2+3x| + C = \ln(x^2+3x)^2 + C$$

För bestämda integraler gäller substitutionsmetoden

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

där $u = g(x)$, $A = g(a)$ och $B = g(b)$.

Exempel: Beräkna $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Lösning: Vi chansar på substitutionen $u = x^2+1$:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\begin{cases} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{cases}, \begin{cases} x=\sqrt{3} \Rightarrow u = (\sqrt{3})^2+1 = 4 \ (=B) \\ x = 0 \Rightarrow u = 0^2+1 = 1 \ (=A) \end{cases}\right]$$

$\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{u-1} \\ dx = \frac{du}{2x} \end{array}\right\}$

$$= \int_1^4 (\sqrt{u-1})^5 \sqrt{u}\,\frac{du}{2\sqrt{u-1}} = \frac{1}{2}\int_1^4 (u-1)^2\sqrt{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 (u^2-2u+1)\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_1^4 (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{7}\cdot 4^{7/2} - \frac{4}{5}\cdot 4^{5/2} + \frac{2}{3}\cdot 4^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right)\right] =$$

$$= [4 = 2^2] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{7}2^7 - \frac{4}{5}2^5 + \frac{2}{3}2^3\right) - \left(\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{7}(128-1) - \frac{4}{5}(32-1) + \frac{2}{3}(8-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot 127 - \frac{2}{5}\cdot 31 + \frac{1}{3}\cdot 7 =$$

$$= \frac{15\cdot 127 - 21\cdot 62 + 35\cdot 7}{7\cdot 5\cdot 3} = \frac{1905 - 1302 + 245}{105} = \frac{848}{105}$$

Partiell integration:

Låt u och v bilda en deriverbar produkt uv.
Enligt produktregeln fås:

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)\,v(x)\right) = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{d}{dx}(u(x)v(x))\,dx = \int u(x)\frac{dv}{dx}\,dx + \int v(x)\frac{du}{dx}\,dx$$

d.v.s. $$\int u(x)\frac{dV}{dx}\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)\frac{du}{dx}\,dx \quad (\dagger)$$

eller på den suggestiva formen

$$\int u(x)\,dv = u(x)v(x) - \int v(x)\,du \quad (*)$$

där $dv = v'(x)\,dx$, $du = u'(x)\,dx$.

Man använder $(*)$ som minnesregel för den rigoröst formulerade formeln $(\dagger)$ för <u>partiell integration</u>.

Exempel: Beräkna $\int x \cos x\,dx$

Lösning: Vi skriver $\int x\cos x\,dx = \int u\,dv$

Vi väljer u, v så att $\int v\,du$ i HL$(*)$ kan integreras "elementärt". Vi ser att $u = x$ och $dv = \cos x\,dx$ ska väljas:

$$\int x\cos x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$$

$$= [u = x \Rightarrow du = dx,\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x] =$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

Exempel: Beräkna $\int x\ln x\,dx$

Lösning: $\int x\ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$

$$= \left[\text{Låt } u = \ln x,\ dv = x\,dx \text{ d.v.s. } du = \frac{1}{x}dx,\ v = \frac{1}{2}x^2\right] =$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Ibland får man en ekvation m.a.p. integralen, vilket nästa exempel visar (upprepad part. int.):

Exempel: Beräkna $I = \int e^x\sin x\,dx$

Lösning: $I = \int e^x\sin x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du =$

$$= \left[\text{Låt } u = e^x,\ dv = \sin x\,dx \text{ d.v.s. } du = e^x dx,\ v = -\cos x\right] =$$

$$= e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)e^x\,dx =$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx =$$

$$= -e^x\cos x + \int u\,dv =$$

$$= -e^x\cos x + uv - \int v\,du =$$

$= [$ Låt $u = e^x$, $dv = \cos x \, dx$
d.v.s. $du = e^x dx$, $v = \sin x$ $] =$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x \, e^x dx =$$
$$= e^x(\sin x - \cos x) - I$$

Detta ska alltså vara integralen I:

$$I = e^x(\sin x - \cos x) - I$$

Lös ut I: $\quad I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$

Integraler av rationella funktioner:

$f(x)$ är en rationell funktion om $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ där P, Q är polynom. Vi antar P:s grad är lägre än Q:s grad (utför polynomdivision annars).

Man vill beräkna $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. Detta görs genom att partialbråksuppdela så att $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kan skrivas på formen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} +$$
$$+ \frac{B_1 x + C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

för några konstanter $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$ samt a, b, c. Vi noterar att

$\int \frac{A_i}{(x-a)^i} dx$ och $\int \frac{B_j x + C_j}{(x^2+bx+c)^j}$ kan beräknas med andra integrationsmetoder.

Exempel: Beräkna $\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$

Lösning: $P(x) = 2x^2+3$, $Q(x) = x^3-2x^2+x$

Vi vill först faktorisera nämnaren Q:

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \text{ (dubbel)}$$

$$\Longrightarrow Q(x) = x(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = [\text{ansätt!}] =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \underbrace{\frac{C}{(x-1)^2}}_{\text{ty faktor } (x-1)^2 \text{ i nämnaren}}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$ (samma form som P/Q)

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}$$

Konstant term: $3 = A \Leftrightarrow A = 3$

Förstagradsterm: $0 = -2\cdot 3 - B + C \Leftrightarrow C = B+6$

Andragradsterm: $2 = 3+B \Leftrightarrow B = -1$

$$\Longrightarrow C = (-1)+6 = 5$$

d.v.s. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$ som partialbråksuppdelning.

Alltså blir integralen

$$\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}\right)dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 5\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - 5\frac{1}{x-1} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{5}{x-1} + C$$

Omvänd substitution:

Om vi beräknar $\int f(x)dx$ genom att införa den nya integrationsvariabeln u genom $x = g(u)$ för någon funktion g så har vi gjort en omvänd substitution och får:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(g(u))g'(u)\,du$$

där $a = g(A)$, $b = g(B)$. Oftast är g en trigonometrisk eller hyperbolisk funktion. (Den hyperboliska substitutionen ingår ej i kursen.)

Exempel: Beräkna $\int \frac{dx}{(3+2x-x^2)^{3/2}}$

Lösning: Vi kommer först kvadratkomplettera, sedan använda substitution och sist omvänd substitution.

$$\int \frac{dx}{(3+2x-x^2)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[-(x^2-2x-3)]^{3/2}} = [\text{Kvadratkompl.}] =$$

$$= \int \frac{dx}{[-((x-1)^2-4)]^{3/2}} = \int \frac{dx}{[4-(x-1)^2]^{3/2}} =$$

$$= \left[\begin{cases} t = x-1 \\ dt = dx \end{cases}\right] = \int \frac{dt}{(4-t^2)^{3/2}} = \left[\begin{cases} t = 2\sin\theta \\ dt = 2\cos\theta\, d\theta \end{cases}\right] =$$

Substitution omvänd substitution

$$= \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(4-4\sin^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{4^{3/2}(1-\sin^2\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2}{8}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{(\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \left[\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\tan\theta + C = \frac{1}{4}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + C = \frac{1}{4}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t/2}{\sqrt{1-(t/2)^2}} + C = \frac{1}{8}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{4}(4-t^2)}} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t}{\sqrt{4-t^2}} + C = \frac{1}{4}\frac{x-1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + C$$

Generaliserade integraler

En generaliserad integral generaliserar det integralbegrepp vi hittills använt ($\int_a^b f$ där f kont. på $[a,b]$). Vi ska därför titta på "integraler" som kan ha oändligt integrationsintervall eller där integranden f är obegränsad på intervallet.

Generaliserade integraler av första typen:

Dessa integraler har ett oändligt integrationsområde.

Definition: Om f kontinuerlig på $[a,\infty)$ så definierar vi den generaliserade integralen av f över $[a,\infty)$ som följande gränsvärde:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

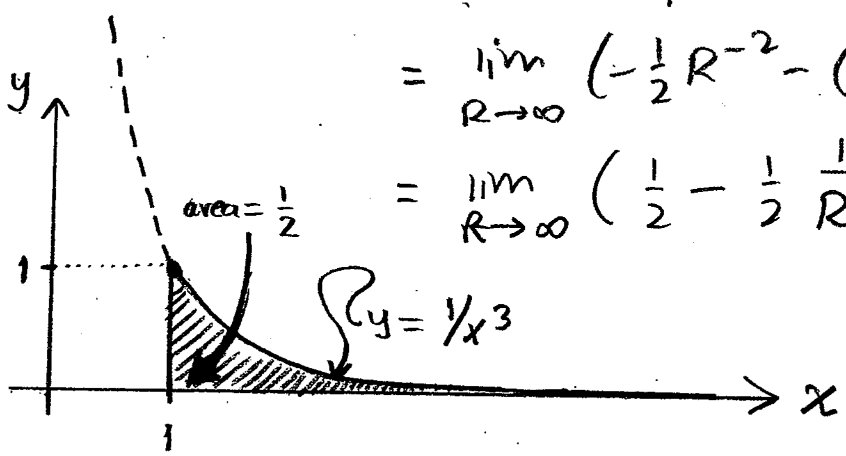
Om f kontinuerlig på $(-\infty, b]$ så definierar vi:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{b} f(x)\,dx$$

Om gränsvärdet existerar så är den generaliserade integralen konvergent. Annars så divergerar den mot oändligheten (om ∞), mot negativa oändligheten (om $-\infty$) eller divergerar.

Exempel: Beräkna $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$.

Lösning: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^3} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)\Big|_1^R =$



$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2}R^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1^{-2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{R^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

En integral av typen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ definieras genom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

om f kontinuerlig på $\mathbb{R}$.

Exempel: Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Lösning: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \lim_{R_1\to-\infty} \int_{R_1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R_2\to\infty} \int_0^{R_2} \frac{dx}{1+x^2} =$$

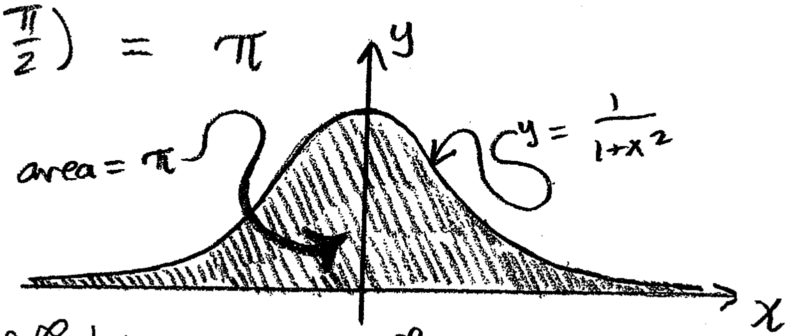
$$= \lim_{R_1\to-\infty} \arctan x \Big|_{R_1}^{0} + \lim_{R_2\to\infty} \arctan x \Big|_0^{R_2} =$$

$$= \left(\arctan 0 - \lim_{R_1 \to -\infty} \arctan R_1\right) +$$

$$+ \left(\lim_{R_2 \to \infty} \arctan R_2 - \arctan 0\right) =$$

$$= [\arctan 0 = 0] = \lim_{R_2 \to \infty} \arctan R_2 - \lim_{R_1 \to -\infty} \arctan R_1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$



<u>Exempel:</u> Beräkna $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ och $\int_{\pi/2}^{\infty} \sin x \, dx$ och visa att de divergerar.

<u>Lösning:</u>

- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \to \infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x} = \lim_{R \to \infty} \ln x \Big|_1^R =$

$$= \lim_{R \to \infty} (\ln R - \underbrace{\ln 1}_{=0}) = \lim_{R \to \infty} \ln R = \infty,$$

d.v.s. divergent mot oändligheten.

- $\int_{\pi/2}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{\pi/2}^{R} \sin x \, dx =$

$$= \lim_{R \to \infty} (-\cos x)\Big|_{\pi/2}^{R} = \left[\cos \frac{\pi}{2} = 0\right] =$$

$$= \lim_{R \to \infty} (-\cos R) = -\lim_{R \to \infty} \cos R,$$

vilken måste vara divergent ty $\cos R$ oscillerar mellan -1 och 1 då $R \to \infty$.