FÖRELÄSNING 7

Vi fortsätter med generaliserade integraler...

Generaliserade integraler av andra typen:

Dessa integraler har obegränsade integrander.

Definition: Om f kontinuerlig på $(a,b]$ och (möjligen) obegränsad nära a så definierar vi den generaliserade integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx$$

På samma sätt, om f kont. på $[a,b)$ och (möjligen) obegränsad nära b, så definierar vi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx$$

Dessa generaliserade integraler konvergerar, divergerar mot oändligheten eller mot negativa oändligheten, eller divergerar.

Exempel: Beräkna $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$. Är den konvergent?

Lösning: Vi noterar att $f(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$ är obegränsad nära $x=0$. Därför gäller:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{c \to 0+} \left(\tfrac{3}{2} x^{2/3}\right)\Big|_c^1 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \lim_{c \to 0+} x^{2/3}\right) = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$$

Den generaliserade integralen är alltså konvergent.

Om man t.ex. har flera punkter på intervallet där integranden är obegränsad får man dela upp i flera generaliserade integraler.

Exempel: $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-1)^{1/3}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-1)^{1/3}} + \int_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-1)^{1/3}} + \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-1)^{1/3}}$$
$$= \lim_{a\to 0-} \int_{-1}^{a} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-1)^{1/3}} + \lim_{b\to 0+} \int_{b}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-1)^{1/3}} +$$
$$+ \lim_{c\to 1-} \int_{1/2}^{c} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-1)^{1/3}} \quad \text{etc.}$$

Sats: Antag att $0 < a < \infty$. Då gäller:

(a) $$\int_a^\infty x^{-p}\,dx = \begin{cases} \text{konv. mot } a^{1-p}/(p-1) & \text{om } p>1 \\ \text{div. mot } \infty & \text{om } p \le 1 \end{cases}$$

(b) $$\int_0^a x^{-p}\,dx = \begin{cases} \text{konv. mot } a^{1-p}/(1-p) & \text{om } p<1 \\ \text{div. mot } \infty & \text{om } p \ge 1 \end{cases}$$

Bevis: Vi bevisar del (a). (Del (b) bevisas i boken.)

Antag $p > 1$: $$\int_a^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R x^{-p}\,dx =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p}\right)\Big|_a^R =$$
$$= \frac{1}{1-p}\left(\lim_{R\to\infty} R^{1-p} - a^{1-p}\right) = [1-p<0] =$$
$$= \frac{1}{1-p}\left(0 - a^{1-p}\right) = \frac{1}{p-1} a^{1-p}$$

Antag $p = 1$: $$\int_a^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R \frac{dx}{x} =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(\ln|x|\right)\Big|_a^R = \lim_{R\to\infty} \ln R - \ln a =$$
$$= \infty$$

Antag $p<1$: $\int_a^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R x^{-p}\,dx =$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p}\right)\Big|_a^R =$$

$$= \frac{1}{1-p}\left(\lim_{R\to\infty} R^{1-p} - a^{1-p}\right) = [1-p>0] =$$

$$= \infty \qquad \square$$

Notera: En integral av typen $\int x^{-p}\,dx$ kallas för en p-integral.

Vi har följande jämförelsesats:

Sats: Antag att f, g kontinuerliga på det möjligen oändliga intervallet (a,b) och uppfyller $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Då gäller:

(1) Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar så gör också $\int_a^b f(x)$ det och, $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

(2) Om $\int_a^b f(x)\,dx$ divergerar mot ∞ så gör också $\int_a^b g(x)\,dx$ det.

Exempel: Avgör huruvida $\int_0^\infty \frac{dx}{(8x+x^4)^{1/3}}$ konvergerar och ge en övre begränsning.

Lösning: $$\int_0^\infty \frac{dx}{(8x+x^4)^{1/3}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(8x+x^4)^{1/3}}}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{(8x+x^4)^{1/3}}}_{=I_2}$$

I_1: Vi har på $(0,1]$ att $(8x+x^4)^{1/3} > (8x)^{1/3} = 2x^{1/3}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(8x+x^4)^{1/3}} < \int_0^1 \frac{dx}{2x^{1/3}} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= \underset{\text{(om p-integraler)}}{[\text{satsen}]} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

I_2: Vi har på $[1,\infty)$ att $(8x+x^4)^{1/3} > (x^4)^{1/3} = x^{4/3}$

$$\Rightarrow I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{(8x+x^4)^{1/3}} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^{4/3}} = \int_1^\infty x^{-4/3}\,dx =$$

$$= \underset{\text{(om p-integraler)}}{[\text{satsen}]} = \frac{1^{1-4/3}}{\frac{4}{3}-1} = 3$$

Vi har alltså att integralen konvergerar och att den är mindre än $\frac{3}{4}+3 = \frac{15}{4}$.

Volymer genom skivning — Rotationskroppar

Hittills har vi tillämpat integralen på areaberäkningar i planet. Vi ska nu titta på några tillämpningar och börjar med volymer genom skivning.

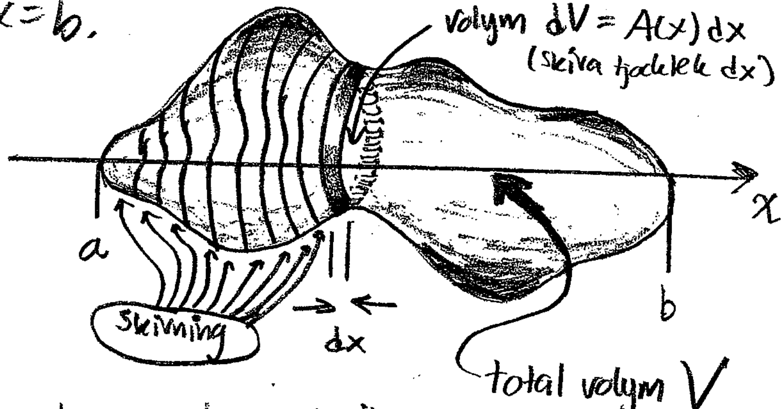
Volymer genom skivning:

Vi definierar en kropp (eng. solid) som en delmängd av $\mathbb{R}^3$, d.v.s. en kropp är ett tredimensionellt objekt.

Om man låter x-axeln definiera en riktning i $\mathbb{R}^3$ så kommer kroppen ha en tvärsnittsarea $A(x)$. Detta ger en infinitisemalt tunn skiva med tjockleken dx och volymen $dV = A(x)dx$. Vi har alltså

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dV = \int_a^b A(x)\,dx$$

som volym på kroppen om den sträcker sig från $x=a$ till $x=b$.



<u>Exempel:</u> Antag att en kropp har tvärsnittsarean $A(x) = 1+x^2$ och ligger mellan $x=0$ & $x=1$. Beräkna volymen.

<u>Lösning:</u> $V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 (1+x^2)\,dx =$

$= \left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = 1+\frac{1}{3} = 4/3$ (volymsenheter)

<u>Rotationskroppar:</u>

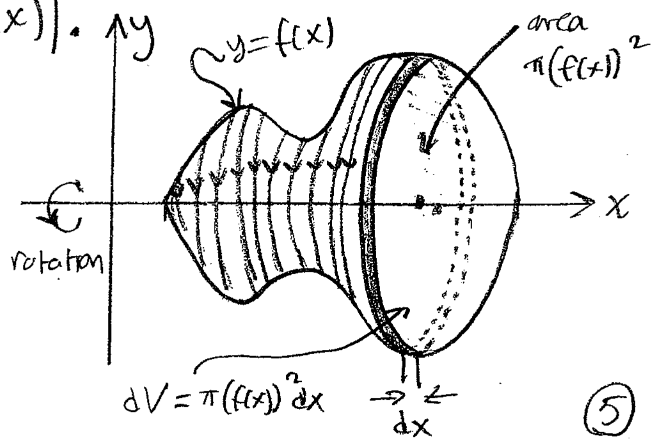
En rotationskropp är bildad genom rotation av ett plant område **R** kring en axel i planet.

Om R begränsas av $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ och x-axeln så ges rotationskroppens volym av

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

ty tvärsnittsarean är $\pi(f(x))^2$ (arean av cirkelskiva med radien $|f(x)|$.

$$\left(dV = \underbrace{\pi(f(x))^2}_{\text{cirkel-skivearea}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{tjocklek}} \right)$$



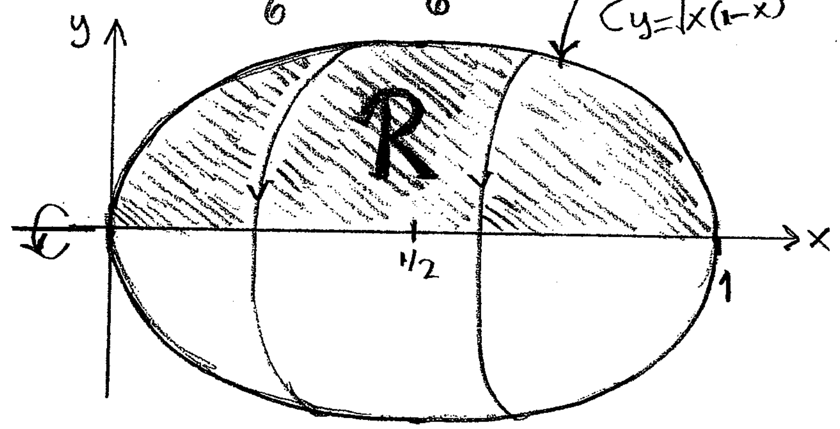
Exempel: Låt R definieras som det område i planet som ligger mellan $x=0$, $x=1$, $y=\sqrt{x(1-x)}$ och x-axeln. Beräkna volymen av rotationskroppen som bildas då R roteras kring x-axeln.

Lösning: $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$, volymen blir då

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^2dx=\pi\int_0^1 x(1-x)\,dx=$$

$$=\pi\int_0^1(x-x^2)\,dx=\pi\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\pi\,\frac{3-2}{6}=\frac{\pi}{6}$$

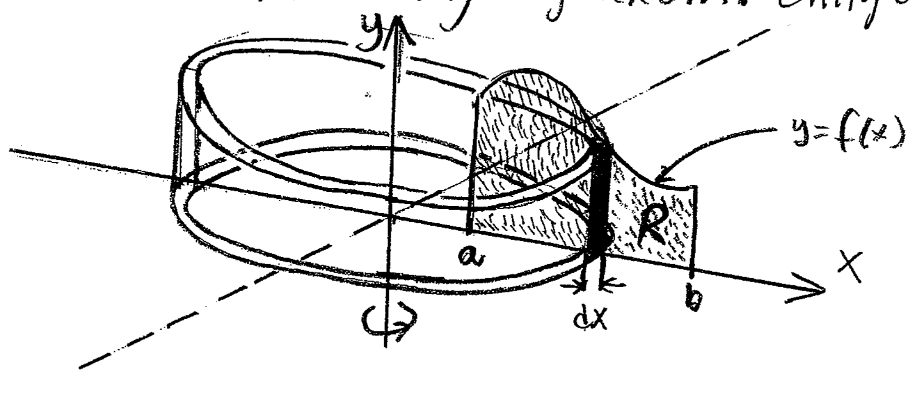


En område R definierat mellan $y=a$, $y=b$, $x=g(y)$ och y-axeln som roteras kring y-axeln ger en rotationskropp med volymen

$$V=\pi\int_a^b(g(y))^2\,dx$$

Cylindriska skal:

Låt R vara området mellan $x=a\geq 0$, $x=b$, $y=\underset{\geq 0}{f(x)}$ och $y=0$. Rotera **R** kring y-axeln. Enligt

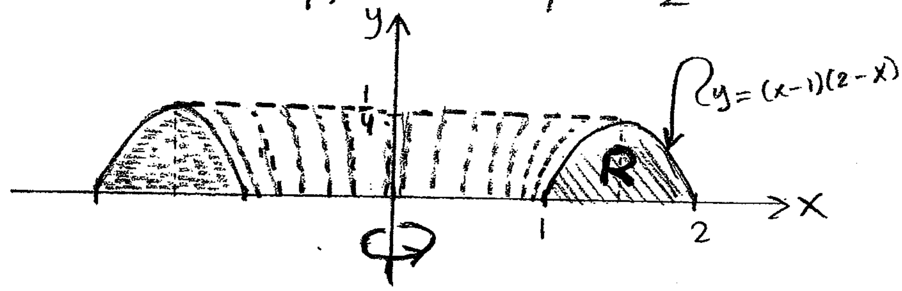


Så fås att varje cylindriskt skal har en volym $dV = \underbrace{2\pi x}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{tjocklek}}$ så att rotationskroppens volym blir $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

Exempel: Låt R definieras genom att vara det område som ligger mellan $x=1, x=2$, $y=(x-1)(2-x)$ och $y=0$. Beräkna volymen av rotationskroppen som bildas då R roterar kring y-axeln.

Lösning: $f(x) = (x-1)(2-x)$ ger volymen

$$V = 2\pi \int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx =$$
$$= 2\pi \int_1^2 x(-x^2+3x-2)\,dx =$$
$$= 2\pi \int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)\,dx =$$
$$= 2\pi \left(-\tfrac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2\right)\Big|_1^2 =$$
$$= 2\pi\left[\left(-\tfrac{1}{4}16+8-4\right)-\left(-\tfrac{1}{4}+1-1\right)\right] =$$
$$= 2\pi\left(-4+4+\tfrac{1}{4}\right) = 2\pi\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{\pi}{2}$$



Ett område R mellan $y=a\geq 0$, $y=b$, $x=g(y)$ (≥ 0) och $x=0$ som roteras kring x-axeln får istället volymen

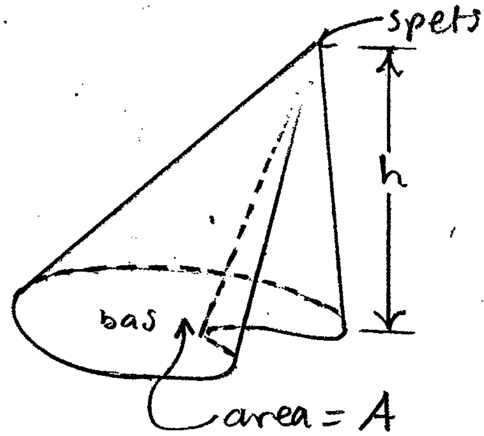
$$V = 2\pi \int_a^b y\,g(y)\,dy$$

Metoderna ovan generaliseras lätt till ringformade kroppar och kroppar begränsade av två funktioner. 7

Mer om volymer genom skivning

Vi återgår till att titta på kroppar som är mer allmänna än roterade plan.

Allmänna koner är kroppar som består av en plan bas med area A och en spets på avståndet h från basen samt alla linjesegment mellan nämnda bas och spets.



Volymen av en allmän kon beräknas på följande sätt:

Tvärsnittsarean på avståndet x från spetsen i riktning vinkelrätt mot basplanet måste vara proportionell mot x^2 samt ha arean A för $x=h$

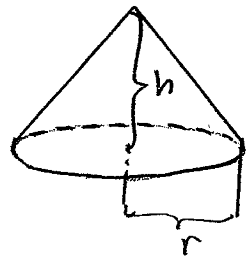
$$\Longrightarrow A(x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 A$$

Detta ger volymen

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \left(\frac{x}{h}\right)^2 A\,dx = \frac{A}{h^2}\int_0^h x^2\,dx =$$

$$= \frac{A}{h^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^h = \frac{A}{h^2}\,\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}Ah$$

d.v.s. volymen är $\frac{1}{3}Ah$. För en vanlig cirkulär kon med basarean $A=\pi r^2$ fås den välbekanta volymsformeln $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.



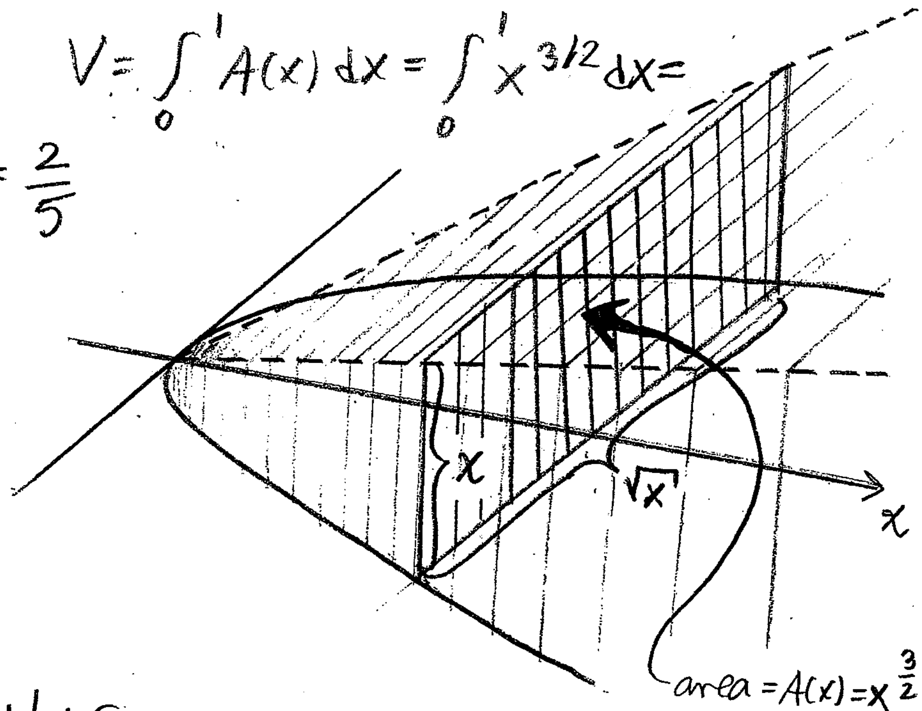
Låt oss titta på ett annat exempel på icke-rotationskropp.

Antag att man bildar en kropp genom att svepa en rektangel med bas $\sqrt{x}$ och höjd x i riktning vinkelrätt mot sitt plan mellan $x=0$ och $x=1$.

Vad är kroppens volym?

<u>Lösning:</u> Tvärsnittsarean hos kroppen är rektangelarean $A(x) = \sqrt{x} \cdot x = x^{3/2}$. Då måste volymen bli $V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 x^{3/2}\,dx =$

$$= \left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$



Båglängd och ytarea

Vi ska nu titta på hur man beräknar längden hos kurvor (repetition fr. översiktskursen) och arean hos rotationsytor.

Båglängd:

Antag att f är definierad på $[a,b]$ och att f' är kontinuerlig på intervallet. Låt C vara den kurva i xy-planet som $y=f(x)$ definierar över $[a,b]$. Då definierar vi båglängden s till C genom

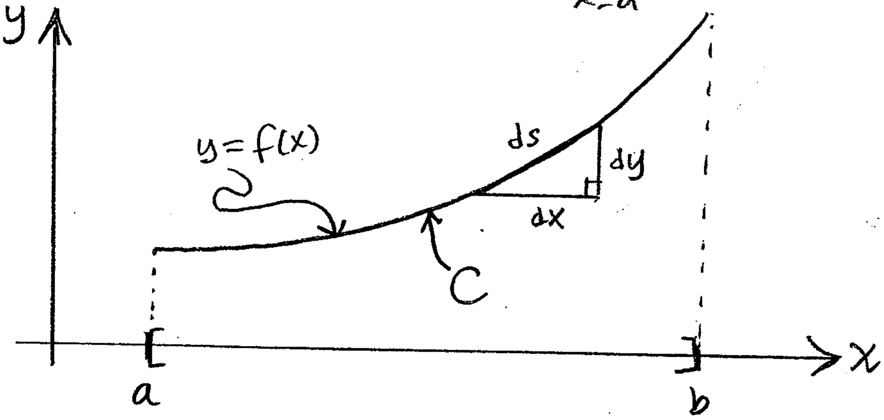
$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Man kan motivera formeln på följande sätt: (Något oegentligt, men kraftfullt intuitivt.)

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)(dx)^2}=$$

$$=\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{x=a}^{x=b}\sqrt{(ds)^2}=\int_{x=a}^{x=b}ds$$

Se figuren:



Pythagoras: $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$

<u>Exempel:</u> Beräkna längden av kurvan C som definieras av $f(x)=x^4+\frac{1}{32x^2}$ på $[1,2]$.

<u>Lösning:</u> Vi har $f'(x)=4x^3-\frac{1}{16x^3}$

$$\Rightarrow\quad 1+(f'(x))^2=1+\left(4x^3-\frac{1}{16x^3}\right)^2=$$

$$=1+(4x^3)^2-2\cdot4\cdot\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{16x^3}\right)^2=$$

$$=(4x^3)^2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{16x^3}\right)^2=$$

$$=\left(4x^3+\frac{1}{16x^3}\right)^2\qquad(*)$$

$$\Rightarrow\quad s=\int_1^2\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\underset{(*)}{=}\int_1^2\left(4x^3+\frac{1}{16x^3}\right)dx=$$

$$=\left(x^4-\frac{1}{32x^2}\right)\Big|_1^2=\left(16-\frac{1}{32\cdot4}\right)-\left(1-\frac{1}{32}\right)=$$

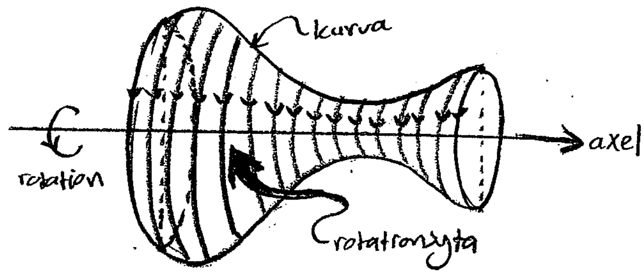
$$=16-\frac{1}{128}-1+\frac{1}{32}=15-\frac{1}{128}+\frac{4}{128}=15+\frac{3}{128}$$

Notera att om C definieras av funktion $x=g(y)$ mellan $y=a$ och $y=b$ så fås istället båglängden

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy$$

Areor av rotationsytor:

När en kurva i planet roteras i en tredje dimension kring en linje i planet så sveper den ut en rotationsyta:

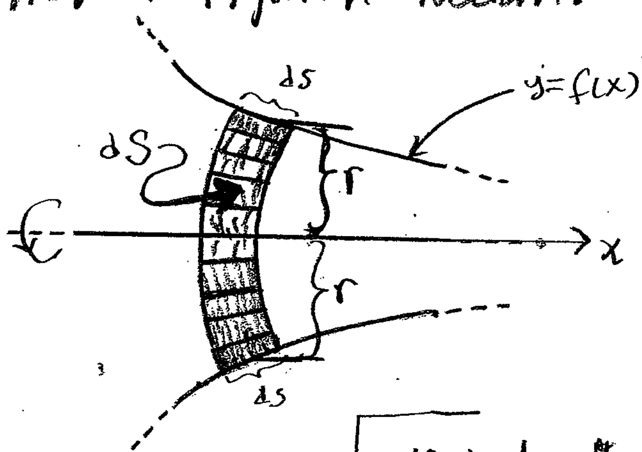


Om kurvan beskrivs av funktionen $y=f(x)$ över intervallet $[a,b]$ så ges den totala ytarean hos rotationskroppen av integralen

$$S = \int_{x=a}^{x=b} dS$$

där dS är areaelementet i figuren nedan.

dS är alltså arean hos bågelementet av längd ds som roteras kring x-axeln. Det gäller att



$$dS = \underbrace{2\pi r}_{\text{bandets omkrets}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{bandets bredd}} =$$

Notera: ds är givet en bredd dx i x-led.

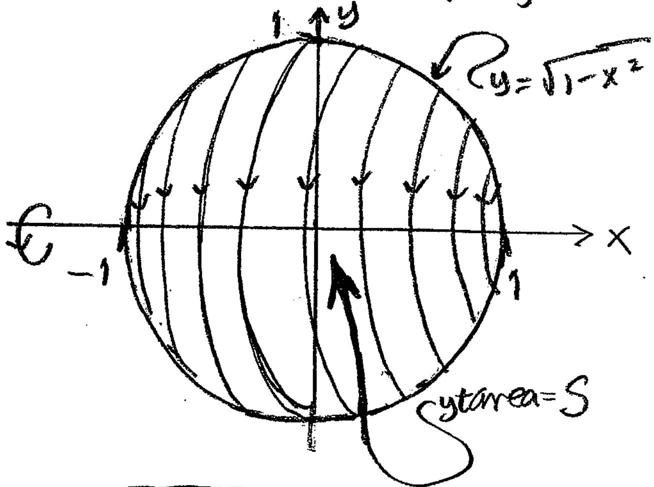
$$= 2\pi|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Så att den totala ytarean ges enligt

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Exempel: Beräkna arean hos enhetssfären, d.v.s. en sfär med radien 1.

Lösning: Vi konstruerar en sådan sfär genom att rotera halvcirkeln $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, runt x-axeln.



Vi har:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

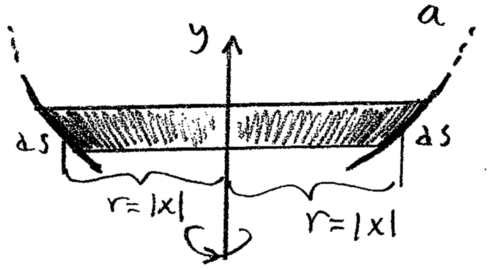
$$\Rightarrow S = 2\pi \int_{-1}^{1} |\sqrt{1-x^2}| \sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\, dx =$$

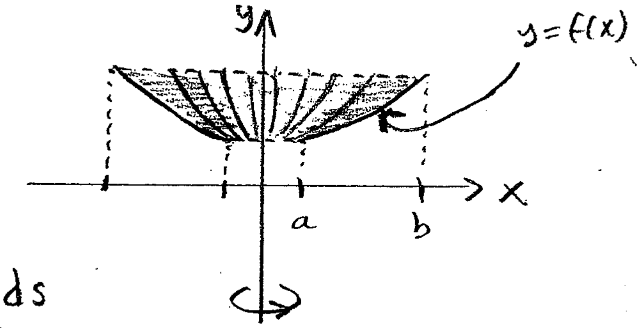
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{(1-x^2)+x^2}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi$$

Om man istället roterar $y=f(x)$ kring y-axeln har man radien $r=|x|$ och då blir formeln

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$



$dS = 2\pi |x| \cdot ds$



Exempel: Beräkna ytarean hos den parabolantenn som beskrivs som rotationen av parabeln $y=x^2$ kring y-axeln över intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Lösning: Vi roterar $f(x)=x^2$, $x \in [0,1]$, kring y-axeln. Vi har $f'(x)=2x$ så ytarean ges av

$$S = 2\pi \int_0^1 |x| \sqrt{1+(2x)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2}\, dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = 1+4x^2 \\ du = 8x\,dx \end{cases}, \begin{cases} x=1 \Rightarrow u=5 \\ x=0 \Rightarrow u=1 \end{cases} \right] =$$

$$= 2\pi \int_1^5 \frac{1}{8}\sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4}\int_1^5 u^{1/2}\, du =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^5 = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}\left(5^{3/2}-1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Om vi istället roterar $x=g(y)$, $y\in[c,d]$, kring x-axeln så ges rotationsytarean av

$$S = 2\pi \int_c^d |y|\sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy \qquad (*)$$

Om $x=g(y)$, $y\in[c,d]$, roteras kring y-axeln så fås istället rotationsytarean

$$S = 2\pi \int_c^d |g(y)|\sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy \qquad (**)$$