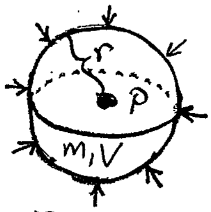
FÖRELÄSNING 8

Massa, moment och masscentrum

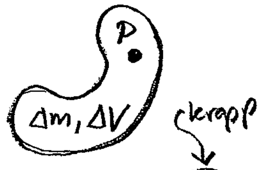
I ett homogent material har man konstant masstäthet. Masstäthet i en punkt P definieras som gränsvärdet $\delta(P)$ givet av



$$\delta(P) = \lim_{r\to 0} \frac{m}{V}$$

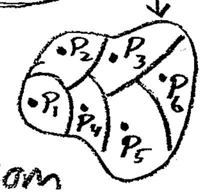
där V är volymen hos en boll med radien r och centrerad i P och m är massan hos materialet i bollen.

Låt P vara en punkt i en kropp och låt ΔV vara ett masselement kring P med massan Δm. Då ges masselementet av



$$\Delta m \approx \delta(P)\Delta V$$

vilket ger kroppens totala massa



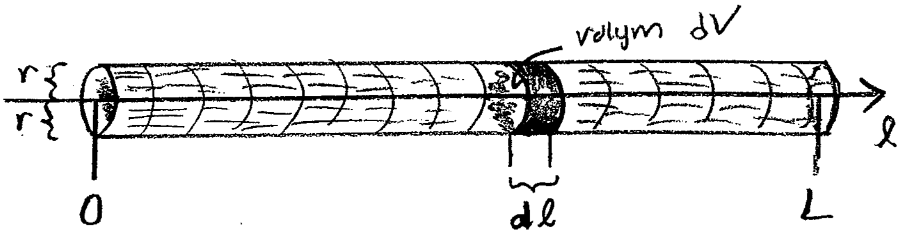
$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \delta(P_i)\Delta V_i$$

där vi summerat över alla volymselement som kroppen är uppdelad i. När antalet volymselement n går mot oändligheten och $\max_{i=1,\dots,n} \Delta V_i \to 0$ då $n \to \infty$ så övergår summan i en integral:

$$m = \int dm = \int \delta(P)\, dV$$

Exempel: Beräkna massan hos en cylinderformad stav av längd L och radien r om tätheten δ ges av $\delta(\ell) = C\ell(L-\ell)$ där $\ell \in [0, L]$ är avståndet från ena änden hos staven.

Lösning: Se figur:



Volymselementet dV ges av

$$dV = \underbrace{\pi r^2}_{\text{tvärsnittsarea}} \cdot \underbrace{d\ell}_{\text{längd}}$$

vilket ger att motsvarande masselement är

$$dm = \delta(\ell)dV = C\ell(L-\ell)\pi r^2 d\ell$$

Detta ger den totala massan

$$m = \int dm = \int_0^L C\ell(L-\ell)\pi r^2 d\ell =$$

$$= C\pi r^2 \int_0^L (L\ell - \ell^2)d\ell =$$

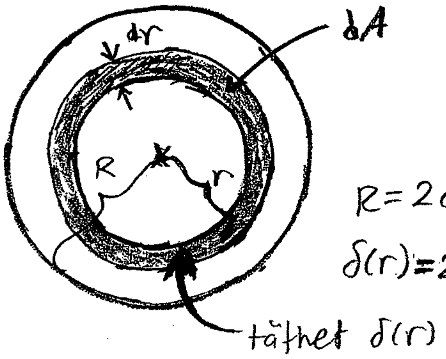
$$= C\pi r^2 \left(\frac{1}{2}L\ell^2 - \frac{1}{3}\ell^3\right)\Big|_0^L =$$

$$= C\pi r^2\left(\frac{1}{2}L^3 - \frac{1}{3}L^3\right) = C\pi r^2 \frac{1}{6}L^3 = \frac{C\pi}{6}r^2L^3$$

Ibland ges tätheten i termer av massa per area-enhet eller massa per längdenhet.

Exempel: Beräkna massan hos en cirkelskiva med radien 2 cm och masstätheten $3r$ g/cm^2 på avståndet r cm från centrum.

Lösning: Låt dA vara arean hos en ring på avståndet r från centrum och med bredden dr. Då fås



$R = 2$cm

$\delta(r) = 2r$

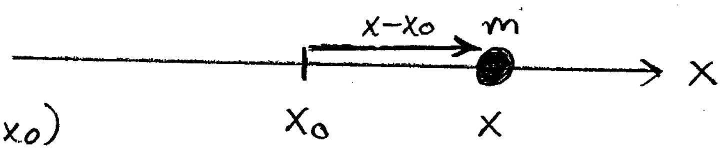
$$dA = \underbrace{2\pi r}_{\text{omkrets ring}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{bredd}}$$

Detta ger masselementet $dm = \delta(r)dA =$
$= 2r \cdot 2\pi r\,dr =$
$= 4\pi r^2 dr,$
så att den totala massan blir

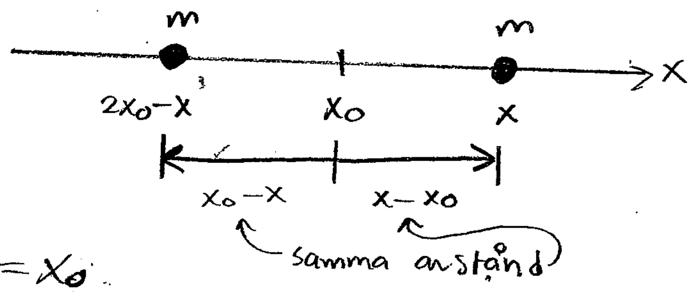
$$m = \int dm = \int_0^2 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^2 r^2 dr =$$
$$= 4\pi \left(\tfrac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^2 = 4\pi \tfrac{1}{3}\cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ g}$$

Moment och masscentra:

Momentet $M_{x=x_0}$ kring $x=x_0$ av en massa m definieras som produkten $M_{x=x_0} = m(x-x_0)$



Vi noterar att momenten $M^{①}_{x=x_0} = m(x-x_0)$
och $M^{②}_{x=x_0} = m((2x_0-x)-x_0) = m(x_0-x)$
tar ut varandra: $M^{tot}_{x=x_0} = M^{①}_{x=x_0} + M^{②}_{x=x_0} = 0$



Vi tolkar detta som att de båda massornas gemensamma masscentrum ligger i $x=x_0$.
ty identiska massor på samma avstånd från $x=x_0$.
I allmänhet gäller för n massor att momentet är:

$$M_{x=x_0} = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_0)$$

Masscentrum $\bar{x}$ ges då momentet $M_{x=\bar{x}}$ kring $x=\bar{x}$ är noll:

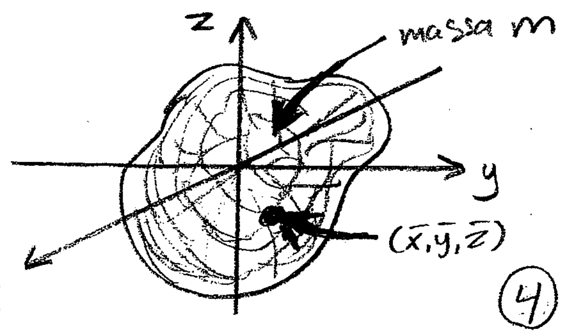
$$0 = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j-\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j - \left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)\bar{x}$$

Masscentrum ges då av
$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{M_{x=0}}{m} \quad (*)$$
där $M_{x=0}$ är momentet kring origo och m total massa. Punkten $\bar{x}$ är fysikaliskt sett balanspunkten där massorna inte kommer tippa åt något håll om de är fastsatta i sina respektive x-koordinater.

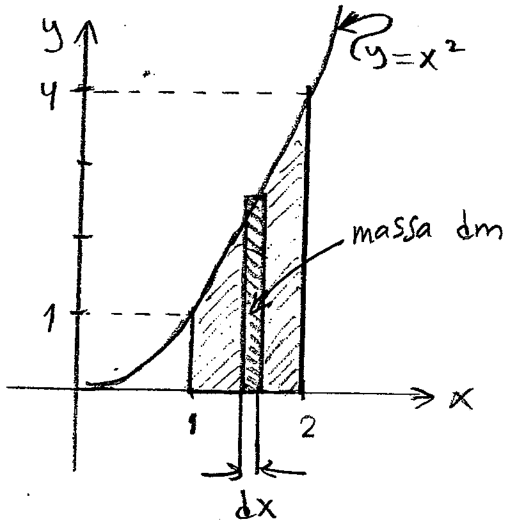
Om vi har en kontinuerlig massfördelning given av tätheten $\delta(x)$ så fås momentelementet
$dM_{x=0} = x\,dm = x\,\delta(x)\,dx$ kring origo. Detta ger totalt moment
$$M_{x=0} = \int_a^b x\,\delta(x)\,dx$$
kring origo för en endimensionell kropp över $[a,b]$. Eftersom totala massan är
$$m = \int_a^b \delta(x)\,dx$$
så måste enligt $(*)$ gälla att masscentrum är
$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

På samma sätt kan man definiera masscentrum hos flerdimensionella objekt:
$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m}.$$

Storheterna $M_{x=0}, M_{y=0}, M_{z=0}$ och m beräknas på olika sätt beroende på geometrin hos problemet.



Exempel: Bestäm masscentrum hos en platta som definieras som området R som ligger mellan $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ samt som har masstätheten $\delta(x)=x$.



Lösning: Se figur:

Masselementet i figuren är

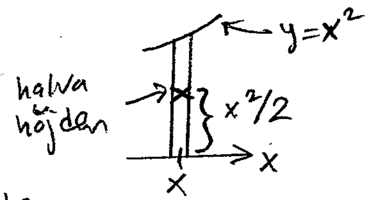
$$dm = \delta(x)\,dA = $$
$$= \underbrace{x}_{\text{täthet}} \cdot \underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{bredd}}}_{\text{area}} = x^3 dx$$

Detta ger ett momentelement kring $x=0$:

$$dM_{x=0} = x\,dm = x^4 dx$$

Momentelementet kring $y=0$ är:

$$dM_{y=0} = \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{\text{halva höjden i } x}\,dm = \tfrac{1}{2}x^2 \cdot x^3 dx = \tfrac{1}{2}x^5 dx$$



Vi får då:

$$m = \int dm = \int_1^2 x^3 dx = \left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2 = \tfrac{1}{4}(2^4-1^4) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(16-1) = 15/4$$

$$M_{x=0} = \int dM_{x=0} = \int_1^2 x^4 dx = \left(\tfrac{1}{5}x^5\right)\Big|_1^2 = \tfrac{1}{5}(2^5-1^5) =$$
$$= \tfrac{1}{5}(32-1) = 31/5$$

$$M_{y=0} = \int dM_{y=0} = \int_1^2 \tfrac{1}{2}x^5 dx = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}x^6\right)\Big|_1^2 =$$
$$= \tfrac{1}{12}(2^6-1^6) = \tfrac{1}{12}(64-1) = 63/12 = 21/4$$

Så att $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m} = \dfrac{31/5}{15/4} = \dfrac{4\cdot 31}{5\cdot 15} = \dfrac{124}{75}$ och

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{21/4}{15/4} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

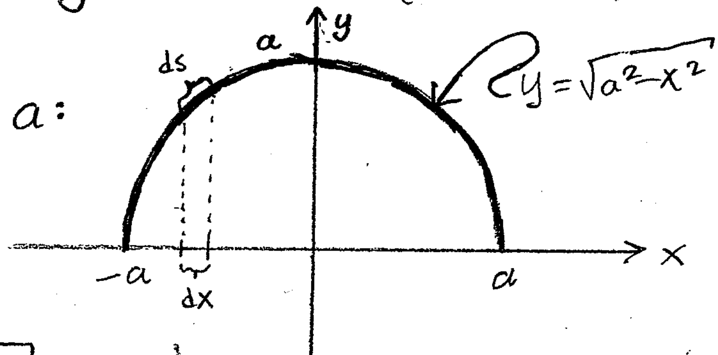
Centroider (geometriska mittpunkter)

Om materien är likformigt fördelad så är mass-tätheten konstant och masscentrum kommer därför enbart bero på formen hos kroppen. Masscentrum kallas då för en centroid (d.v.s. geometrisk mittpunkt).

I de redan härledda formlerna för masscentrum så sätter man $\delta = 1$ så fås centroiden till kroppen. Om uppenbara symmetrier finns så utnyttjar man dem.

Exempel: Bestäm centroiden $(\bar{x}, \bar{y})$ till halvcirkeln som ges enligt $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (radie $= a$)

Lösning: Halvcirkel radie a:



Masselementet i x om $\delta = 1$ ges av:

$$dm = 1 \cdot ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \left[\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right] =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \sqrt{\frac{(a^2 - x^2) + x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Momentelementet kring $y = 0$ ges av

$$dM_{y=0} = y\, dm = \sqrt{a^2 - x^2}\, \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\, dx$$

Eftersom halvcirkelns längd är $\frac{1}{2} \cdot 2\pi a = \pi a$ och masstätheten $\delta = 1$ så är massan $m = \pi a$.

Det totala momentet kring $y = 0$ är

$$M_{y=0} = \int_{x=-a}^{x=a} dM_{y=0} = \int_{-a}^{a} a\,dx = 2a\int_{0}^{a} 1\,dx = 2a^2$$

Detta ger $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{m} = \dfrac{2a^2}{\pi a} = \dfrac{2a}{\pi}$

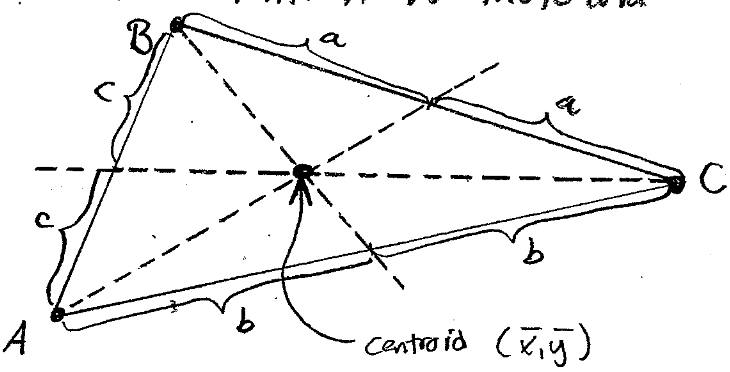
P.g.a. symmetri måste $\bar{x} = 0$.

Centroiden är alltså $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \dfrac{2a}{\pi}\right)$.

Vi har följande användbara sats:

<u>Sats:</u> En triangels centroid är den punkt där de tre medianerna skär varandra.

<u>OBS:</u> En median är en rät linje som sammanbinder en triangelhörn med mitten av motsatta sidan.

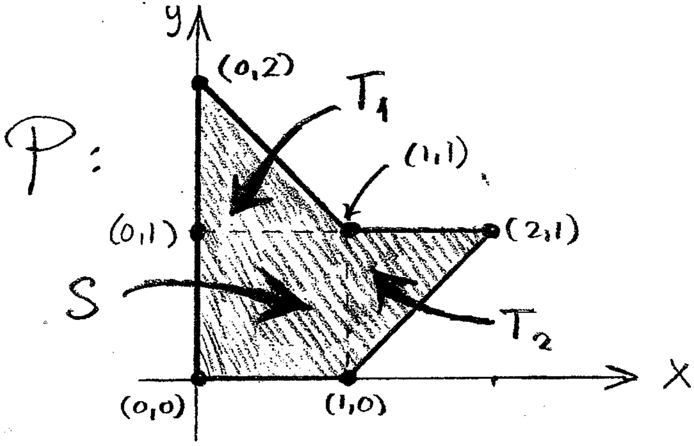


Om $A: (x_1, y_1)$
$B: (x_2, y_2)$
$C: (x_3, y_3)$

så ges centroiden av

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

<u>Exempel:</u> Bestäm centroiden till följande polygon P:



Lösning: Polygonen ges som unionen $P = S \cup T_1 \cup T_2$ av kvadraten S och trianglarna T_1 och T_2.

Kvadraten: Denna har centroiden $(\bar{x}_S, \bar{y}_S) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ p.g.a. symmetri. Vi noterar att massan är $m_S = 1 \cdot 1 = 1$. (Ty $\delta = 1$.)

Triangel 1: Denna har hörnen $(0,1), (0,2)$ & $(1,1)$.

Centroid: $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \left(\frac{0+0+1}{3}, \frac{1+2+1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Massa: $m_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Triangel 2: Hörn $(1,0), (1,1)$ & $(2,1) \Rightarrow (\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Massa: $m_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Momentet kring $x=0$ blir:

$$M_{x=0} = M_{S,x=0} + M_{1,x=0} + M_{2,x=0} =$$
$$= m_S \bar{x}_S + m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Moment kring $y=0$ blir:

$$M_{y=0} = m_S \bar{y}_S + m_1 \bar{y}_1 + m_2 \bar{y}_2 =$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Total massa: $m = m_S + m_1 + m_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

Centroiden till polygonen P blir då

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{m}, \frac{M_{y=0}}{m}\right) = \left(\frac{4/3}{2}, \frac{3/2}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

Följande sats kan vara användbar:

Pappus' sats: (a). Antag området R med area A ligger på ena sidan om linjen L som vi roterar R kring. Då kommer rotationsvolymen V ges av $V = 2\pi \bar{r} A$ där $\bar{r}$ är avståndet mellan L och R:s centroid.

(b) Antag kurvan C med längd s ligger på ena sidan om linjen L som vi roterar C kring. Då kommer rotationsytarean S ges av $S = 2\pi \bar{r} s$ där $\bar{r}$ är avståndet mellan L och C:s centroid.

Bevis: (a) bevisas i boken. Låt oss därför bevisa (b).

Låt L vara y-axeln och antag C ligger mellan $x=a$ och $x=b$. Då måste $\bar{r} = \bar{x}$ i detta koordinatsystem. Ett element ds längs C kommer generera rotationsytareaelementet $dS = 2\pi x\, ds$

$$\Longrightarrow S = \int_{x=a}^{x=b} dS = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} x\, ds = [\text{Men } ds = dm \text{ om } \delta = 1] =$$

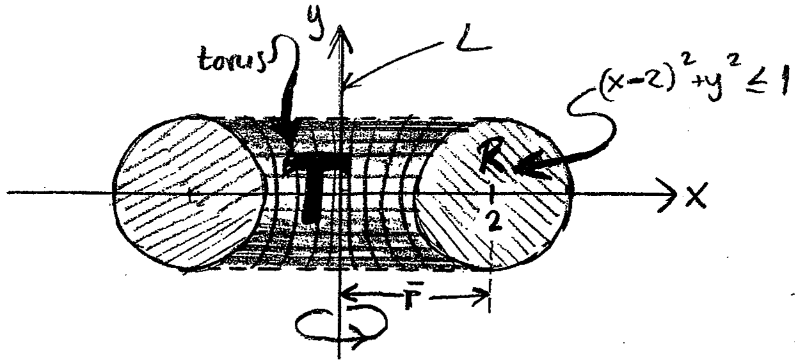
$$= 2\pi \int_{x=a}^{x=b} x\, dm = 2\pi M_{x=0} = 2\pi \bar{r} m \underset{\delta=1}{=} 2\pi \bar{r} s$$

ty $\bar{r} = \bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m}$. $\square$

Exempel: Låt R vara cirkelskivan $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$. Bilda torusen T genom att rotera R kring y-axeln. Använd Pappus' sats för att bestämma T:s volym V.

Lösning: Figur:

R:s centroid ligger p.g.a. symmetri i $(\bar{x}_R, \bar{y}_R) = (2,0)$



så att avståndet mellan denna och $L = y$-axeln är $\bar{r} = 2$. Arean A hos R är arean hos en cirkel med radien 1, d.v.s $A = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Enligt Pappus' sats (a) blir därför rotationskroppsvolymen

$$V = 2\pi \bar{r} A = 2\pi \cdot 2 \cdot \pi = 4\pi^2$$

Andra fysikaliska tillämpningar

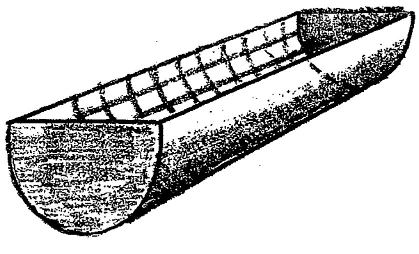
Hydrostatiskt tryck: På djupet h i en vätska med masstätheten δ är det s.k. hydrostatiska trycket givet av $p = \delta g h$ och anger kraften per areaenhet som utövas mot en yta i vätskan. (Kraften är lika stor i alla riktningar, d.v.s. s.k. "isotropi" råder.)

[Notera: $g = 9.8\,m/s^2$ (tyngdaccelerationen)
$\delta = 1000\,kg/m^3$ (vattnets masstäthet)]

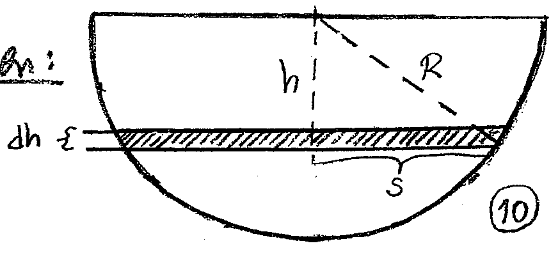
Exempel: Antag att man har ett vattentråg där en vägg är formad som en halvcirkelskiva med radie 25 cm och plana sidan vänd uppåt. Beräkna kraften som vattnet utövar mot väggen.

Lösning:

Vatten-tråg:



Väggen:



Enligt Pythagoras sats så ges s i figuren enligt:

$$R^2 = h^2 + s^2 \Leftrightarrow s = \sqrt{R^2 - h^2} \quad (h = \text{djupet})$$

Därför har bandet arean $dA = 2s\,dh = 2\sqrt{R^2 - h^2}\,dh$

Trycket på djupet h ges av $p = \delta g h$.

Kraften dF på bandet (riktning utåt vinkelrätt mot väggen) är $\quad dF = p\,dA = \delta g h \cdot 2\sqrt{R^2 - h^2}\,dh$

Totala kraften:

$$F = \int_{h=0}^{h=R} dF = \int_0^R \delta g h \cdot 2\sqrt{R^2 - h^2}\,dh =$$

$$= \delta g \int_0^R 2h\sqrt{R^2 - h^2}\,dh =$$

$$= \left[\begin{cases} u = R^2 - h^2 \\ du = -2h\,dh \end{cases}, \begin{cases} h = R \Rightarrow u = 0 \\ h = 0 \Rightarrow u = R^2 \end{cases} \right] =$$

$$= -\delta g \int_{R^2}^{0} \sqrt{u}\,du = \delta g \left(\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right)_0^{R^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\delta g R^3 = \frac{2}{3} \cdot 1000 \cdot 9.8 \cdot 0.25^3 \approx 102\text{ N}$$

Arbete: Om en kraft verkar på ett föremål så att det rör sig en sträcka så har kraften utfört ett arbete på föremålet. Om W är arbetet och F(x) kraften i position x så ges arbetet av

$$W = \int_{x=a}^{x=b} dW = \int_a^b F(x)\,dx$$

om kraften verkar från $x=a$ till $x=b$.

Exempel: Tyngdkraften som Jorden utövar på en massa m på höjden h från jordytan ges av $F(h) = \dfrac{Km}{(R+h)^2}$ där K är en konstant och R Jordradien. Bestäm arbetet som krävs för att lyfta massan från jordytan och oändligt långt ut i rymden.

Lösning: Det krävs en kraft riktad uppåt av samma storlek som tyngdkraften för att lyfta massan. Alltså ges arbetet W av den generaliserade integralen

$$W = \int_0^{\infty} F(x)\,dx = \lim_{H\to\infty} \int_0^H \frac{Km}{(R+h)^2}\,dh =$$

$$= Km \lim_{H\to\infty} \int_0^H \frac{dh}{(R+h)^2} = Km \lim_{H\to\infty} \left(-\frac{1}{R+h}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= Km \lim_{H\to\infty} \left(-\frac{1}{R+H} - \left(-\frac{1}{R+0}\right)\right) =$$

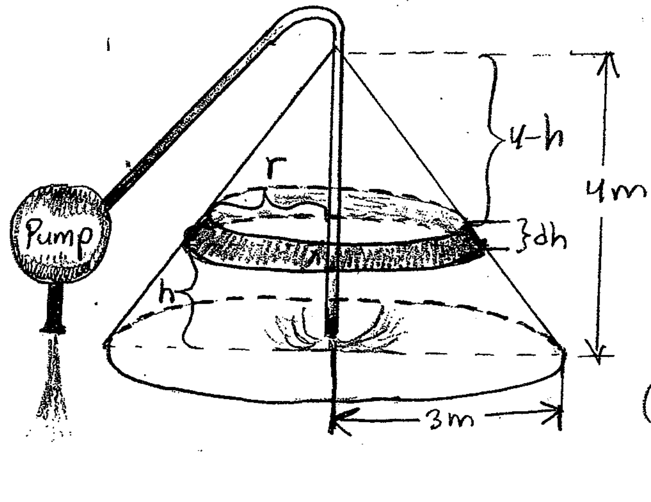
$$= Km \lim_{H\to\infty} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = Km\left(\frac{1}{R} - 0\right) =$$

$$= Km/R$$

Exempel: Hur mycket arbete krävs för att pumpa ut allt vatten ur en fylld konformad tank med spetsen uppåt och som har basradien 3m och djupet 4m?

Lösning: Se figur:

Kalla vattendjupet h. Ytan på vattnet har då radien r given genom likformighet:



$$\frac{r}{4-h} = \frac{3\text{ m}}{4\text{ m}} \Leftrightarrow r = \frac{3}{4}(4-h) \quad (*)$$

Det tunna cirkelskiveformade vattenstycket har volymen

$$dV = \underbrace{\pi r^2}_{\text{area}} \cdot \underbrace{dh}_{\text{höjd}} \overset{(*)}{=} \pi\left(\frac{3}{4}(4-h)\right)^2 dh$$

Dess tyngd är då

$$dF = dm\ g = (\delta dV)g = \delta g \cdot \pi\left(\frac{3}{4}(4-h)\right)^2 dh$$

Det borde gälla att arbetet dW att pumpa ut vattenstycket är arbetet att lyfta upp stycket till toppen av konen, d.v.s. en höjd $4-h$:

$$dW = (4-h)dF = (4-h)\,\delta g\,\pi\left(\frac{3}{4}(4-h)\right)^2 dh$$

$$= \frac{9\pi}{16}\delta g\,(4-h)^3\,dh$$

Det totala arbetet att tömma tanken är då:

$$W = \int_{h=0}^{h=4} dW = \int_0^4 \frac{9\pi}{16}\delta g\,(4-h)^3 dh =$$

$$= \frac{9\pi}{16}\delta g \int_0^4 (4-h)^3 dh = \frac{9\pi}{16}\delta g\left(-\frac{1}{4}(4-h)^4\right)\Big|_0^4 =$$

$$= -\frac{9\pi}{64}\delta g\,(4-h)^4\Big|_0^4 = -\frac{9\pi}{64}\delta g\left((4-4)^4-(4-0)^4\right) =$$

$$= -\frac{9\pi}{64}\delta g\,(-4^4) = \frac{9\pi}{64}\delta g \cdot 256 = 9\pi\,\delta g \cdot 4 =$$

$$= 36\pi\,\delta g = 36\pi \cdot 1000 \cdot 9.8 \approx 1.11 \times 10^6\ \text{Nm}$$