FÖRELÄSNING 9

Talföljder och konvergens

En (oändlig) <u>talföljd</u> är en ordnad lista med ett första element men inget sista.

Exempel:
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ (de positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$)
- $\{1, -2, 4, -8, 16, \ldots\}$ (de icke-negativa heltalspotenserna av -2)

En talföljd $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ är en funktion f med definitionsmängd $D_f = \mathbb{Z}_+$ (vanligen) sådan att $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Det finns tre sätt att definiera en talföljd:

(i) Ge de första termerna följt av "...".

Exempel: Se exemplen längre upp på sidan.

(ii) Ge a_n explicit som funktion av n.

Exempel: $\left\{\frac{n-2}{3n}\right\} = \left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

(iii) Ge a_n som funktion av tidigare termer samt startvärden.

Exempel: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ med startvärdena $a_1 = 1, a_2 = 1$: $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$

(Den s.k. Fibonaccitalföljden.)

Definition: (a) • $\{a_n\}$ är nedåt begränsad av L och L är en undre begränsning till $\{a_n\}$ om $a_n \geq L$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. På liknande sätt,

• $\{a_n\}$ är uppåt begränsad av M och M är en övre begränsning till $\{a_n\}$ om $a_n \leq M$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. Dessutom gäller att

• $\{a_n\}$ är begränsad om både nedåt och uppåt begränsad. ($\exists K > 0 : |a_n| \leq K \ \forall n$)

(b) • $\{a_n\}$ är positiv om $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

• $\{a_n\}$ är negativ om $a_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$

(c) • $\{a_n\}$ är växande om $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

• $\{a_n\}$ är avtagande om $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

• $\{a_n\}$ är monoton om växande eller avtagande.

(d) Antag $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Då är $\{a_n\}$ alternerande om $a_n a_{n+1} < 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$ (a_n och a_{n+1} har olika tecken).

Exempel: Visa att $\{a_n\}$ där $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ är växande.

Lösning: Växande: $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Definiera

$f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$. Då gäller $f(n) = a_n$. Om f ickeavtagande på $[1, \infty)$, d.v.s. $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in [1, \infty)$, så måste $\{a_n\}$ vara växande. Vi har:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in [1, \infty)$$

så $\{a_n\}$ är växande.

Vi är egentligen bara intresserade av vad som händer med en talföljd på "lång sikt" d.v.s. då $n \to \infty$.

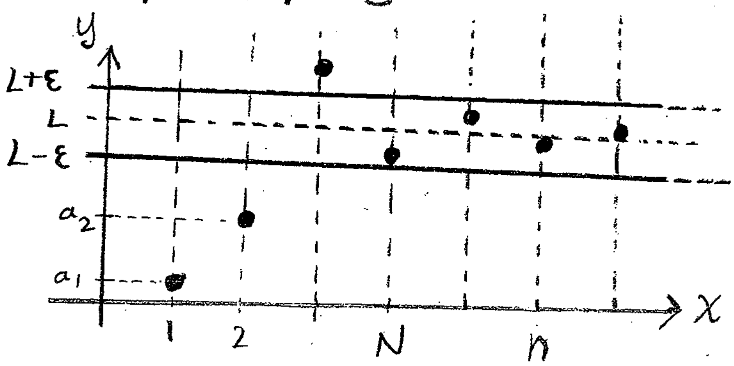
Om en följd $\{a_n\}$ är växande först fr. o. m. någon term $N > 1$, d.v.s. $a_{n+1} > a_n \ \forall n \geq N$, så säger vi att följden är <u>slutligen växande</u> (eng. "ultimately increasing"). Motsvarande gäller begreppen slutligen avtagande, slutligen positiv, slutligen negativ samt slutligen alternerande.

<u>Konvergens av talföljder:</u>

En talföljd <u>konvergerar</u> om $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ existerar, och vi säger då att $\{a_n\}$ konvergerar mot L.
En stringent definition:

<u>**Definition:**</u> $\{a_n\}$ sägs konvergera mot gränsvärdet L, d.v.s. $\lim_{n \to \infty} a_n = L$, om för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal $N = N(\varepsilon)$ sådant att

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$



Om $\lim_{n \to \infty} a_n$ inte existerar så <u>divergerar</u> $\{a_n\}$.

Om $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ (oegentligt) så divergerar $\{a_n\}$ mot ∞ (analogt för $-\infty$).

Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ och $f(n) = a_n$ ger att $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ så gäller samma standardräkneregler för talföljder som för funktionsgränsvärden då $x \to \infty$.

<u>Exempel:</u> Bestäm gränsvärdet till $\{\sqrt{n^2+2n} - n\}$.

<u>Lösning:</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1} =$$

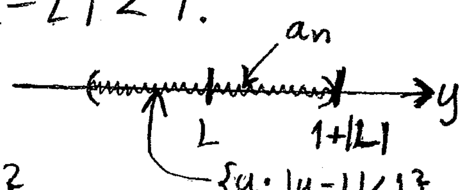
$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1$$

<u>Sats:</u> Om $\{a_n\}$ konvergerar så är $\{a_n\}$ begränsad.

<u>**Bevis:**</u> Låt $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, d.v.s. L är $\{a_n\}$:s gränsvärde (som finns enligt antagande).

Fixera $\varepsilon = 1$. Per definition finns då ett N sådant att om $n > N$ så $|a_n - L| < 1$.

Då måste $|a_n| < 1 + |L| \ \forall n > N$.



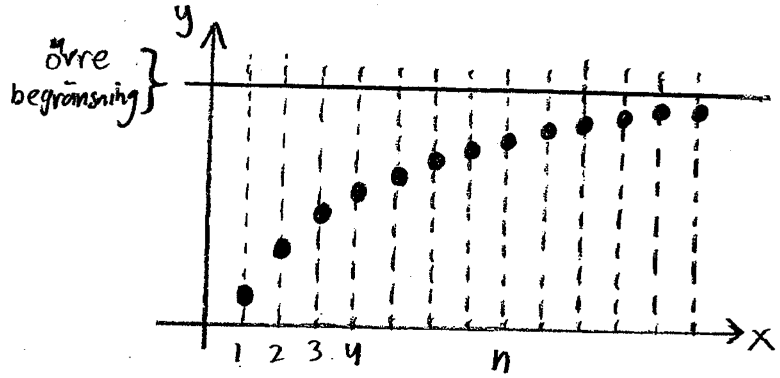
Låt $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1+|L|\}$.

Då måste alltså $|a_n| \le K \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

$\{a_n\}$ är alltså begränsad. $\square$

En direkt konsekvens av det s.k. "axiomet om minsta övre begränsning" som säger att varje uppåt begränsad mängd i $\mathbb{R}$ har en minsta övre begränsning (kallat "Supremum", eller sup, av mängden) är:

- Om $\{a_n\}$ är uppåt begränsad och slutligen växande så konvergerar den.
- Om $\{a_n\}$ är nedåt begränsad och slutligen avtagande, så konvergerar den.



$\{a_n\}$ (slutligen) växande

<u>Sats:</u> • Om $\{a_n\}$ (slutligen) växande så är den antingen uppåt begränsad (och därmed konvergent; se ovan) eller inte uppåt begränsad (d.v.s. divergerar mot ∞).

• Motsvarande gäller (slutligen) avtagande talföljder. (Fast nedåt begr. resp. divergent mot $-\infty$.)

Nedan följer två viktiga gränsvärden för talföljder.

<u>Sats:</u> (a) Om $|x| < 1$ så konvergerar $\{x^n\}$ och

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

(b) Om $x \in \mathbb{R}$ (d.v.s. godtyckligt reellt tal) så konvergerar $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ och $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

<u>Bevis:</u> (a) Vi har $\lim_{n\to\infty} \ln(|x|^n) = \lim_{n\to\infty} n \ln|x| = -\infty$ (*)

ty $\ln|x| < 0$ eftersom $|x| < 1$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x|^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(|x|^n)} = [f(x)=e^x \text{ kontinuerlig}] =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \ln(|x|^n)} = 0 \quad \text{p.g.a } (*).$$

Vi har instängningen $\underbrace{-|x|^n}_{\to 0} \leq x^n \leq \underbrace{|x|^n}_{\to 0}$ så instängningssatsen ger $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

(b) Fixera $x \in \mathbb{R}$. Låt N vara sådan att $N > |x|$.
För $n > N$ gäller nu

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \frac{|x|}{N} \frac{|x|}{N+1} \cdots \frac{|x|}{n} <$$

$$< \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \underbrace{\frac{|x|}{N} \frac{|x|}{N} \cdots \frac{|x|}{N}}_{n-N+1 \text{ faktorer}} = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N+1} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{1-N}\right)}_{=K}\left(\frac{|x|}{N}\right)^n = K\left(\frac{|x|}{N}\right)^n \quad (\dagger)$$

Konstanten K är oberoende av n.
Vi valde N sådan att $N > |x| \Leftrightarrow \frac{|x|}{N} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|}{N}\right)^n = 0 \quad \text{enligt (a) ovan.}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0 \quad \text{enligt olikheten } (\dagger).$$

Alltså måste vi ha $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. $\square$

Oändliga serier

En <u>oändlig serie</u> (eller bara <u>serie</u>) är den formella summan av alla termer i en talföljd.

Talföljden $\{a_n\}$ ger alltså serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Exempel: Låt $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$.

Då blir motsvarande serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

OBS: Serien kan börja för vilket index som helst, t.ex. $\sum_{n=3}^{\infty} a_n = a_3 + a_4 + a_5 + \dots$

(Med substitution $m = n-2 \Leftrightarrow n = m+2$ får man dock $\sum_{n=3}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{a_{m+2}}_{=b_m}$ med start i index 1.)

Hur ska en oändlig serie $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ tolkas? D.v.s., i vilken ordning adderar man egentligen termerna?

Definiera $\{s_n\}$, den s.k. följden av delsummor, enligt

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (*)$$

Denna talföljd är entydigt definierad för $\{a_n\}$ given.

Definition: Vi säger att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar mot summan s, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, om

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \text{ där } \{s_n\} \text{ given av } (*).$$

Geometriska serier:

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ kallas **geometrisk serie** med **kvot** r (och första term a).

Delsumman för en geometrisk serie ges enligt

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

Vi ser att $S_n - rS_n = a - ar^n$

d.v.s. $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ om $r \neq 1$.

Om $r=1$ fås istället $S_n = \underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ termer}} = na$

Vi får följande utfall:

- **$a=0$:** $S_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 0$.

  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ konvergerar mot 0

- **$a \neq 0$ & $|r|<1$:** $\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a(1-0)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$.

  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ konvergerar mot $\dfrac{a}{1-r}$

- **$a>0$ & $r \geq 1$:** Om $r=1$ så $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$

  Om $r>1$ så $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n =$

  $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \infty$

  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ divergerar mot ∞

- **$a<0$ & $r \geq 1$:** Som i fallet ovan men $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$

  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ divergerar mot $-\infty$

• $a \neq 0$ & $r \leq -1$: $\lim_{n\to\infty} r^n$ existerar ej $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ existerar ej

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ divergerar

Exempel: • $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = [a=\frac{1}{3}, r=\frac{1}{3}] =$

$= \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$ (konvergens)

• $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $a=1, r=-\frac{3}{2}$

d.v.s. $r<-1$ så serien divergerar

• $e+\pi+\frac{\pi^2}{e}+\frac{\pi^3}{e^2}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} e\left(\frac{\pi}{e}\right)^{n-1}$, $a=e, r=\frac{\pi}{e}$

d.v.s. $a>0$ och $r>1$ så serien divergerar mot ∞

Teleskopserier och harmoniska serier:

För en s.k. teleskopserie gäller att delsummorna "fälls ihop" så att de inre termerna i utvecklingen tas ut vid lämplig omskrivning.

Exempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ är en teleskopserie.

Vi kan skriva $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{partialbråksuppdela}}{=} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Detta ger

$$s_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}_{=0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{=0}+\ldots+\underbrace{\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)}_{=0}+\frac{1}{n+2} =$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}$$

Så att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n =$

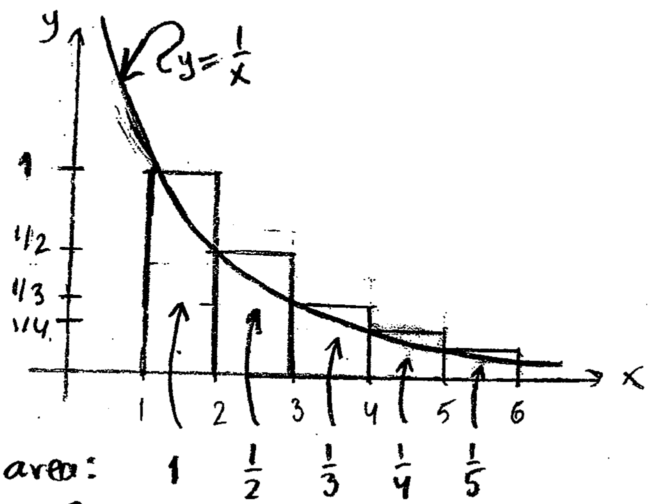
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{(konvergens)}$$

Den <u>harmoniska serien</u> är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$.

<u>Påstående:</u> Den harmoniska serien divergerar mot ∞.

<u>Bevis:</u> Delsumman är $S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Se figur:



Vi ser att

$1 > \int_1^2 \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2} > \int_2^3 \frac{dx}{x}$

etc.

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \int_3^4 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

d.v.s. $S_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \left(\ln|x|\right)\Big|_1^{n+1} =$

$$= \ln(n+1)$$

Så att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$

Den harmoniska serien divergerar mot ∞. $\square$

<u>Sats:</u> (i) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) Om $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ eller inte existerar så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Bevis: (ii) följer ur (i). Vi bevisar (i).

Låt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Då måste $S_n - S_{n-1} = a_n$.
Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ för något gränsvärde S (seriens värde). Men då måste även $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ gälla.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \square$$

I en konvergent serie måste alltså termerna gå mot noll. (Det omvända gäller inte, se t.ex. den harmoniska serien där $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ men $\sum_{n=1} a_n = \infty$.)

Sats: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar omm $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerar $\forall N \in \mathbb{Z}_+$

Sats: Om $\{a_n\}$ är slutligen positiv så måste serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ antingen konvergera eller divergera mot ∞.

Sats: Låt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B < \infty$.
Då gäller att:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$ (välj antingen + eller −)

(c) Om $a_n \le b_n \; \forall n \in \mathbb{Z}_+$ så $A \le B$.

Exempel: Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-5^{n+2}}{6^{n-1}}$. Konvergent?

Lösning:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-5^{n+2}}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 2^n - 5^2\cdot 5^n}{\frac{1}{6}6^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 6\,\frac{2\cdot 2^n - 25\cdot 5^n}{6^n} = [\text{Regel (a)}] =$$

$$= 6\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\left(\tfrac{2}{6}\right)^n - 25\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\right] = [\text{Regel (b)}] =$$

$$= 6\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 25\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\right] = [\text{Regel (a)}] =$$

$$= 6\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n - 6\cdot 25\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^n =$$

$$= 12\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} - 150\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{5}{6}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} =$$

[Geometriska serier]
$\left(a=r=\frac{1}{3} \text{ resp. } a'=r'=\frac{5}{6}\right)$

$$= 12\,\frac{1/3}{1-\frac{1}{3}} - 150\,\frac{5/6}{1-\frac{5}{6}} =$$

$$= 12\,\frac{1}{3-1} - 150\,\frac{5}{6-5} = \frac{12}{2} - \frac{150\cdot 5}{1} =$$

$$= 6 - 750 = -744$$

Serien är konvergent med värde -744.