Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Omtentamen 2010-03-16 kl. 08:00–13:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p.) Aspektuppgiften markerad A kan höja betyget om den är löst tillräckligt väl.

1. Visa med hjälp av den formella definitionen av derivata (d.v.s. med ε–δ-formalism) att för $f(x) = x^2$ så gäller $f'(1) = 2$. (2p)

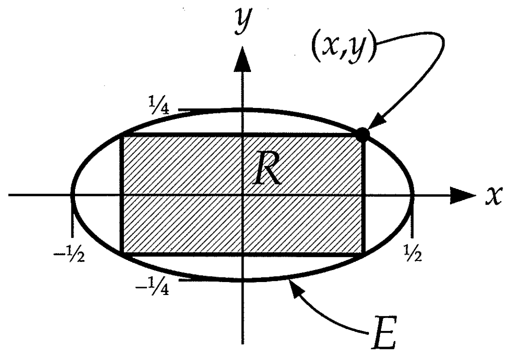
2. Bestäm integralerna nedan.

a) $\int_1^2 x^3 \ln x \, dx$. (1p)

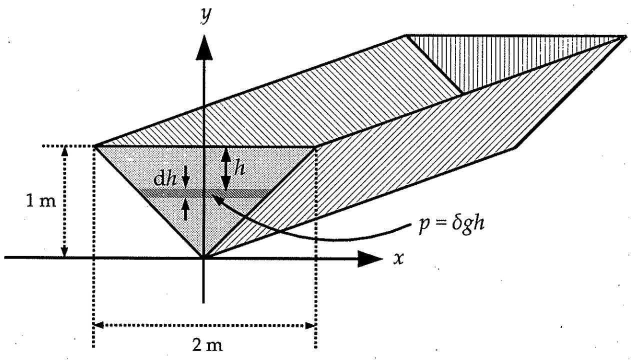
b) $\int \frac{dx}{x^2-4}$. (1p)

c) $\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\, dx$. (1p)

3. Låt R vara en rektangel som är inskriven i en ellips E definierad som mängden av alla (x, y) sådana att $4x^2 + 16y^2 = 1$, se Figur 1. Bestäm rektangeln R:s största möjliga area. (3p)



Figur 1. Rektangeln R och ellipsen E i Uppgift 3.



Figur 2. Vattenho med triangelformad vägg i Uppgift 4.

4. De vertikala väggarna i en vattenho är formade som en likbent triangel med höjden 1 m och basen 2 m och nedåtriktad spets. Om vi antar att vattenhon är full, hur stor är den totala kraften som vattnet utövar mot en av dessa triangelformade väggar? (Ledtrådar: Trycket på djupet h ges av $p = \delta g h$ där $\delta = 1000$ kg/m^3 och $g = 10$ m/s^2. Notera att trycket utövar en kraft $F = pA$ mot en yta med arean A. Se också Figur 2.) (3p)

5. Avgör huruvida serierna nedan konvergerar eller divergerar.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$. (Ledtråd: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent mot ∞.) ($\frac{3}{2}$p)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. (Ledtråd: Det gäller att $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.) ($\frac{3}{2}$p)

6. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}$. (Ledtråd: Använd Maclaurinserierna $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ och $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.) (3p)

7. Visa med induktion att $5^n + 3$ är delbart med 4 för alla $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. (Ledtråd: Ett tal delbart med 4 kan alltid skrivas $4k$ för något heltal k.) (3p)

8. **a)** Bestäm de allmänna lösningarna till $y' - \frac{2}{x} y = x^2 \mathrm{e}^x$. (2p)

b) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, & (\dagger) \\ y(1) = 1, & \\ y'(1) = 1. & \end{cases}$$

(Ledtråd: Differentialekvationen (†) är en Eulerekvation.) (2p)

A. Formulera Medelvärdessatsen och Rolles sats. Använd sedan Rolles sats för att bevisa Medelvärdessatsen.

LÖSNINGAR TILL OMTENTAN 2010-03-16

1.

Ett sätt att definiera derivatan på är

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (*)$$

Med den formella definitionen av derivata innebär $(*)$ att

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ s.a.

$$(\dagger) \qquad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon$$

Här gäller $f(x) = x^2$ och $a = 1$. Vi ska verifiera att $f'(1) = 2$. Det gäller att:

$$\left| \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - f'(1) \right| = \left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| =$$

$$= \left| \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} - 2 \right| = |(x+1)-2| =$$

$$= |x-1|$$

vilket vi vill ska vara $< \varepsilon$. Vi får $|x-1| < \varepsilon$ om $0 < |x-1| < \delta$ för $\delta = \varepsilon$.

Implikationen $(\dagger)$ gäller alltså om vi för varje $\varepsilon > 0$ väljer $\delta = \varepsilon$. Vi har verifierat att $f'(1) = 2$ stämmer. $\square$

2. a) $$\int_1^2 x^3 \ln x \, dx = \int_1^2 u\,dv \overset{\text{P.I.}}{=} (uv)\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,du =$$

$$= \left[\text{Låt } u = \ln x,\ dv = x^3 dx \quad \text{d.v.s. } du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{1}{4}x^4 \right] =$$

$$= \left(\ln x \cdot \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4}x^4 \frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 \ln x\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 \ln x\right)\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4\left(\ln x - \frac{1}{4}\right)\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2^4\left(\ln 2 - \frac{1}{4}\right) - 1^4\left(\ln 1 - \frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(16 \ln 2 - 4 - 0 + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 4 \ln 2 - 1 + \frac{1}{16} = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$

b) $$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{(x+2)(x-2)}\,dx$$

Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} \overset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + 2(B-A)}{(x+2)(x-2)}$$

Vi identifierar

$$\begin{cases} A+B = 0 & (1) \\ 2(B-A) = 1 & (2) \end{cases}$$

Ur (1) fås $A=-B$, vilket i (2) ger:

$$2(B-(-B)) = 1 \iff B = 1/4$$

$$\implies A = -1/4$$

$$\implies \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{-1/4}{x+2} + \frac{1/4}{x-2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\ln(x-2) - \ln(x+2) \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

c) $$\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2-1}\, dx = \left[\begin{cases} u = x^2-1 \\ du = 2x\,dx \end{cases}, \begin{cases} x=\sqrt{2} \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=0 \end{cases} \right] =$$

$\boxed{x = (u+1)^{1/2}}$

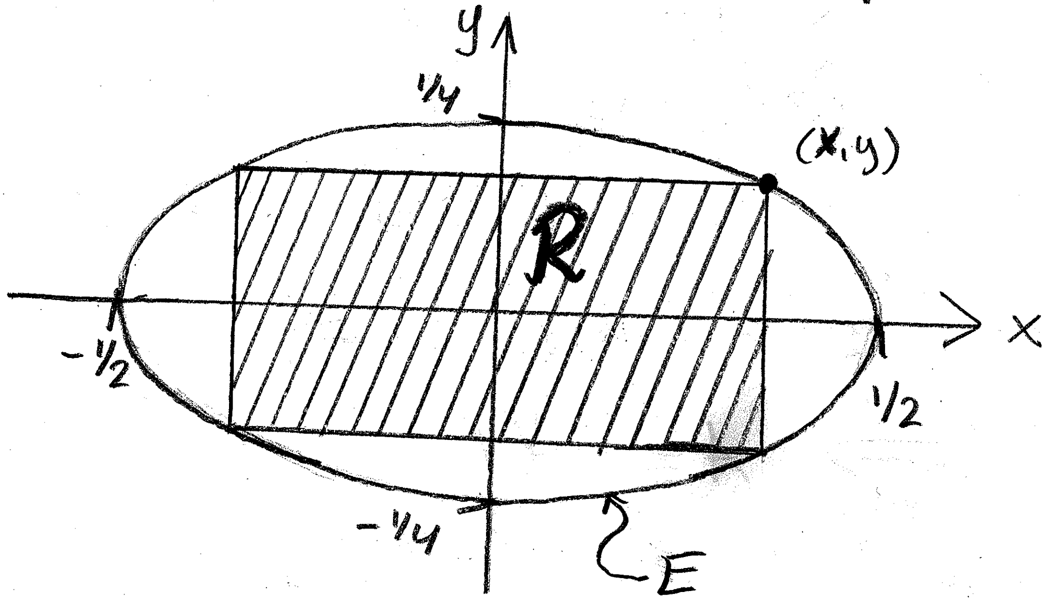
$$= \int_0^1 (u+1)^{3/2} u^{1/2} \frac{du}{2(u+1)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (u+1) u^{1/2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^{3/2} + u^{1/2}) du =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3+5}{15} = 8/15$$

3. Rektangel R och ellips E enligt:



Punkten (x,y) ligger dels på E och dels i R:s övre högra hörn (vi kan anta att (x,y) ligger i första kvadranten p.g.a. symmetri), d.v.s.

$$4x^2 + 16y^2 = 1, \quad \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{2}] \\ y \in [0, \frac{1}{4}] \end{cases}$$

Arean hos R ges då av

$$A = 2x \cdot 2y = 4xy$$

Lös ut y ur ellipsformeln:

$$4x^2 + 16y^2 = 1$$

$$16y^2 = 1 - 4x^2$$

$$y^2 = \frac{1}{16}(1 - 4x^2)$$

$$y = \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{1}{16}(1-4x^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$$

Detta ger arean uttryckt i x:

$$A(x) = 4x \cdot \frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} =$$

$$= x\sqrt{1-4x^2}, \quad x \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

A:s största värde fås antingen i de stationära punkterna i $(0, \frac{1}{2})$ eller i någon av ändpunkterna.

Derivera A m.a.p. x:

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-4x^2} + x\frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \frac{(1-4x^2) - 4x^2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1-8x^2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1/8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \overset{+}{(-)}\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \in (0, \tfrac{1}{2})$$

Arean i denna punkt:

$$A\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Arean i ändpunkterna på $[0, \frac{1}{2}]$:

$$A(0) = 0\cdot\sqrt{1-4\cdot 0^2} = 0 < \frac{1}{4}$$

$$A(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4\cdot(\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4\cdot\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-1} =$$

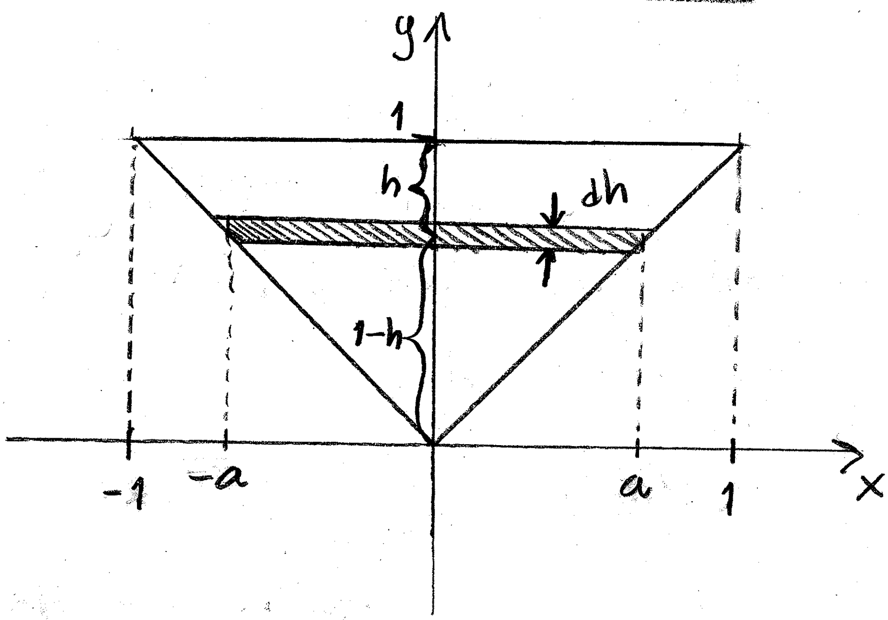
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 0 = 0 < \frac{1}{4}$$

Vi drar slutsatsen att rektangelns största möjliga area är $1/4$.

---

4. Väggen:

Vattendjup:
$h \in [0,1]$



Ur figuren ser vi att det p.g.a likformighet måste gälla att (SI-enheter):

$$\frac{1}{1-h} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1-h$$

Smala bandet med bredd dh och längd 2a har arean $dA = 2a \cdot dh = 2(1-h)dh$

Trycket på djupet h ges av

$$p = \rho g h = 1000 \cdot 10 \cdot h = 10^4 h$$

Kraften på bandet blir således

$$dF = p\,dA = 10^4 h \cdot 2(1-h)dh$$

Totala kraften fås genom att integrera

alla dF-bidrag från $h=0$ till $h=1$:

$$F = \int_{h=0}^{h=1} dF = \int_0^1 10^4 h \cdot 2(1-h)\,dh =$$

$$= 2\times 10^4 \int_0^1 (h-h^2)\,dh =$$

$$= 2\times 10^4 \left(\tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^3\right) =$$

$$= 2\times 10^4 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 2\times 10^4\,\frac{3-2}{6} =$$

$$= \frac{1}{3}\times 10^4 \approx 3.3\times 10^3$$

Den totala kraften som vattnet utövar mot ena väggen är c:a 3.3 kN.

---

5. a) Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$. Ledtråden att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent m. ∞ antyder att vi kan använda ett jämförelse-kriterium. Låt $a_n = \frac{1}{3n-2}$ och $b_n = \frac{1}{n}$. Låt oss nu beräkna följande gränsvärde för $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n-2}}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(3-\frac{2}{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-\frac{2}{n}} = \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3} > 0$$

Då vet vi enligt jämförelsekriteriet (på gränsvärdesform, se s.5ff i F10) att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞ om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞ så måste alltså även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, d.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$, divergera mot ∞.

Serien divergerar.

b) Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Låt $a_n = \frac{n!}{n^n}$, då är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Använd nu kvotkriteriet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1}$$

Eftersom $\rho = e^{-1} = 1/e < 1$ (ty $e \approx 2.72$) så ger kvotkriteriet att serien konvergerar.

---

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)} =$ [Maclaurinserieutveckla] =

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} - x}{x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots\right) - x}{x\left[\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots\right) - 1\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots}{x\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \dots}{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{120}x^2 - \dots}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 - \dots} = \frac{-\frac{1}{6} + 0}{-\frac{1}{2} + 0} = \frac{1}{3}$$

---

7. Påstående: $5^n + 3$ delbart med 4 (*) för alla $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

Bevis: Låt P_n vara påståendet (*), d.v.s. att $5^n + 3$ är delbart med 4. Vi ska alltså visa att P_n sant $\forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

- Startsteg ($n=0$): P_0 sant? Vi har

$5^0 + 3 = 1 + 3 = 4$, vilket är delbart med 4, så P_0 sant. Startsteget är verifierat.

- Induktionssteg: Gäller implikationen

$$P_p \text{ sant} \Rightarrow P_{p+1} \text{ sant}$$

för alla $p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$?

Antag P_p sant (induktionsantagande). Detta innebär att det finns ett $k \in \mathbb{Z}$ sådant att

$$5^p + 3 = 4k \qquad (+)$$

ty $5^p + 3$ delbart med 4. Vi får:

$$5^{p+1} + 3 = 5 \cdot 5^p + 3 = [\text{ind.ant. } (+)] =$$
$$= 5 \cdot (4k - 3) + 3 =$$
$$= 20k - 15 + 3 = 20k - 12 =$$
$$= 4(5k - 3) = 4k'$$

där $k' = 5k - 3 \in \mathbb{Z}$ ty $k \in \mathbb{Z}$. Vi har visat att P_{p+1} sant. Induktionssteg verifierat.

Enligt induktionsprincipen är P_n sant $\forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. $\square$

8. a) DE: $y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x \quad (*)$

Denna är:
- Första ordningens
- Linjär
- Inhomogen

Alltså ska man använda integrerande faktor (I.F.). Då ska $(*)$ multipliceras med I.F. e^{μ} där

$$\mu = \int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2\ln|x|$$

$$\Rightarrow e^{\mu} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2} \quad (+)$$

Vi får då att $(*)$ och $(+)$ ger

$$e^{\mu}y' - e^{\mu}\frac{2}{x}y = e^{\mu}x^2e^x$$

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = e^x$$

$$\frac{1}{x^2}y = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

d.v.s.

$$y = (e^x + C)x^2$$

är våra allmänna lösningar.

b) DE (BVP): $\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 & (\dagger) \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

Det gäller att $(\dagger)$ är en s.k. Euler-ekvation $\left(x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \right)$.

x^2 $\qquad$ x

De allmänna lösningarna till $(\dagger)$ fås genom att lösa den karaktäristiska ekvationen:

$$1 \cdot r(r-1) - 3r + 4 = 0$$

d.v.s. $\quad r^2 - 4r + 4 = 0$

konj.regeln: $\quad (r+2)(r-2) = 0$

så att $\quad r = \pm 2$

Eftersom vi har en dubbelrot så är allmänna lösningarna till $(\dagger)$

$$y = (C_1 + C_2 \ln|x|)|x|^r =$$
$$= (C_1 + C_2 \ln|x|)x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger

$$(C_1 + C_2 \underbrace{\ln 1}_{=0}) 1^2 = 1$$
$$C_1 = 1$$

$$\Rightarrow y = (1 + C_2 \ln|x|)x^2$$

Derivera:

$$y' = C_2 \frac{1}{x} x^2 + (1 + C_2 \ln|x|) \cdot 2x =$$

$$= C_2 x + 2(1 + C_2 \ln|x|)x$$

Begynnelsevillkoret $y'(1) = 1$ ger

$$C_2 \cdot 1 + 2(1 + C_2 \underbrace{\ln 1}_{=0}) \cdot 1 = 1$$

$$C_2 + 2 = 1$$

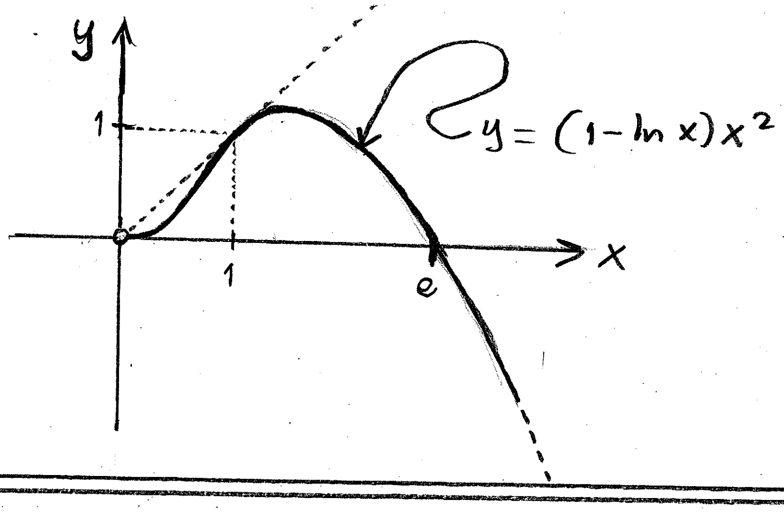
$$C_2 = -1$$

$\Longrightarrow$ Lösningen är

$$y = (1 - \ln|x|)x^2$$

(Notera att lösningen endast är giltig för $x > 0$ så man kan skriva $y = (1 - \ln x)x^2$.)

Skiss:



A. Se Föreläsning 3 s. 5, 10ff.