Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Omtentamen 2010-08-26 kl. 08:00–13:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p.) Aspektuppgiften markerad A kan höja betyget om den är löst tillräckligt väl.

1. a) Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε–δ-formalism) att $\lim\limits_{x\to 2} 3x = 6$. (1p)

   b) Skissera funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$. Avgör huruvida $x = 1$ är en hävbar diskontinuitet eller ej. (1p)

2. Bestäm integralerna nedan.

   a) $\int \arctan x \, dx$. (Ledtråd: Uppfatta integranden som en produkt.) (1p)

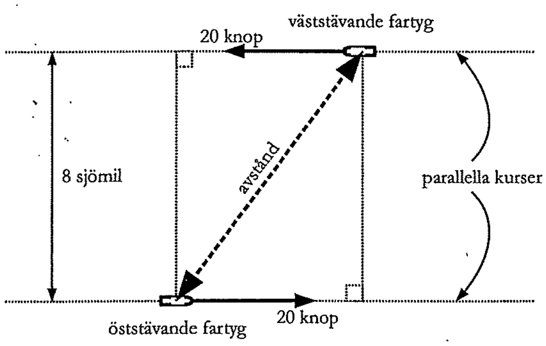
   b) $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{x^3+x} \, dx$. (1p)

   c) $\int\limits_{4/\sqrt{3}}^{4} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$. (Ledtråd: Substituera $x = \frac{a}{\sin u}$ för något lämpligt a.) (1p)

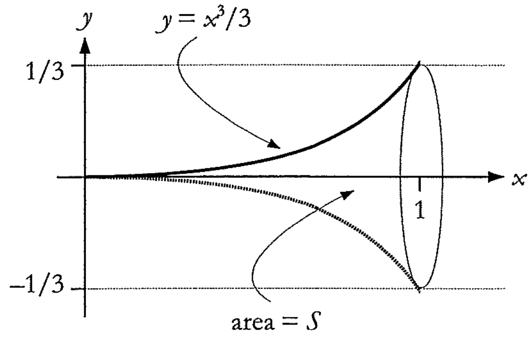
3. Konvergerar den generaliserade integralen $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$? Motivera! (3p)

4. Två fartyg, det ena stävandes rakt västerut och det andra rakt österut, närmar sig varandra på parallella kurser som är 8 sjömil från varandra. Om båda fartygen håller farten 20 knop, med vilken hastighet minskar avståndet mellan dem när de är 10 sjömil från varandra? (Ledtrådar: Se Figur 1 samt notera att det per definition gäller att 1 knop = 1 sjömil/h.) (3p)

5. Bestäm arean S för den rotationsyta som bildas när man roterar kurvan $y = \frac{1}{3}x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, kring x-axeln. (Ledtråd: Se Figur 2.) (3p)



Figur 1. Fartygen i Uppgift 4.



Figur 2. Rotationsytan med arean S i Uppgift 5.

6. Använd en Maclaurinserieutveckling för att bestämma $\sqrt{1.5}$ med ett fel på mindre än 5×10^{-3}. (Ledtråd: $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n$ för $x \in (-1, 1)$. Denna serie är alternerande om man bortser från första termen.) (3p)

7. Visa med induktion att $2n \leqslant 2^n$ för alla $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. (3p)

8. a) Bestäm lösningen till den "homogena" DE:n $y' = \frac{8x^2+y^2}{xy}$ givet att sidovillkoret $y(1) = 4$ uppfylls. (2p)

b) Använd den förbättrade Eulerstegmetoden med steglängden $h = 0.25$ för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

på intervallet $[0, 1]$. (2p)

A. Formulera Analysens huvudsats (I) och (II) samt bevisa antingen (I) eller (II).

LÖSNINGAR TILL OMTENTAN 2010-08-26

1.

a) $\lim_{x \to 2} 3x = 6$ betyder formellt:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{För varje } \varepsilon > 0 \text{ finns } \delta > 0 \text{ sådant att} \\ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |3x-6| < \varepsilon \qquad (*)\end{array}}$$

Låt oss ta en närmare titt på HL(*):

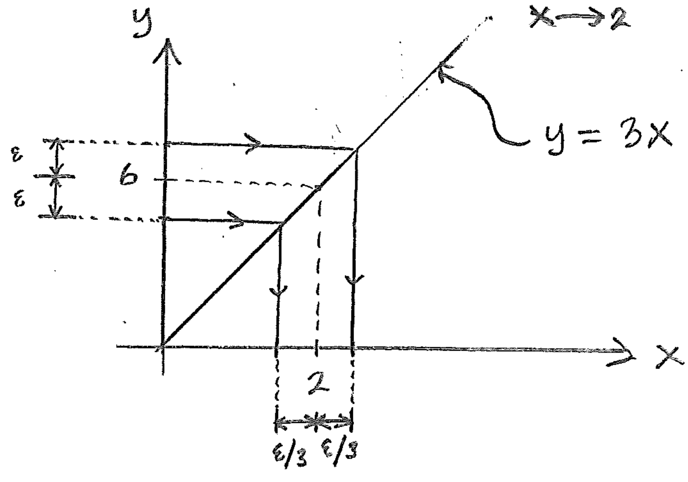
$$|3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2|$$

vilket är mindre än ett givet $\varepsilon > 0$ om

$$3|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon/3$$

Välj $\delta = \varepsilon/3$. Då gäller implikationen (*).

Vi har visat att $\lim_{x \to 2} 3x = 6$.

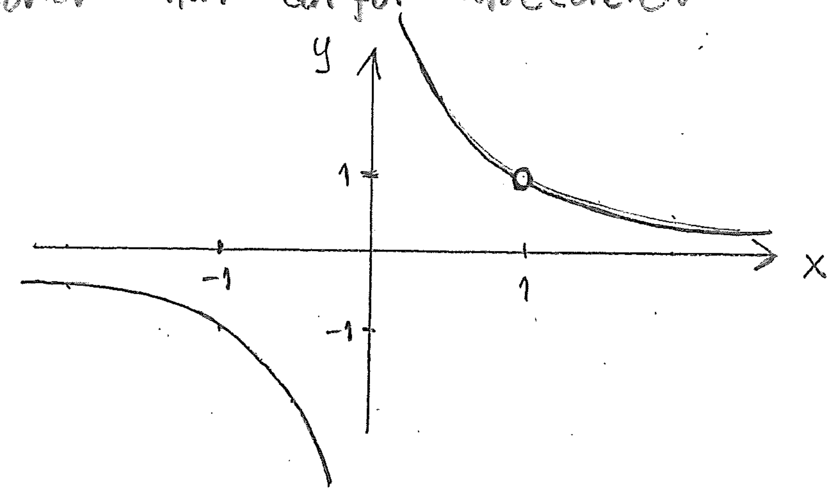


b) $f(x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$, odefinierad för $x = 0$ och $x = 1$

Vi har att

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

Funktionen har därför utseendet



Punkten $x=1$ är en diskontinuitet man kan "häva" eftersom

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1, \text{ d.v.s. finns}$$

(och den kontinuerliga utvidgningen F till f i $x=1$ är $F(x) = \frac{1}{x}$; notera dock att F inte är kontinuerlig i $x=0$, det är inte en hävbar diskontinuitet!).

---

2. a) $\int \arctan x \, dx = \int u \, dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v \, du =$

$= [\text{ Låt } u = \arctan x, \; dv = dx$
d.v.s. $du = \frac{1}{1+x^2} dx, \; v = x \,] =$

$= \arctan x \cdot x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx =$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C =$

$= x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

b) $$\int_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx = \int_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = (*)$$

Ansätt $$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (+)$$

Vi vill ha $VL_{(+)} = HL_{(+)}$:

$$HL_{(+)} = \frac{A(x^2+1) + x(Bx+C)}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)} = VL_{(+)}$$

Identifiering av likgradiga termer i täljaren:

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ C = 0 \\ A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+B = 1 \\ C = 0 \\ A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 \\ C = 0 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (*) = \int_{1/2}^{2} \left(\frac{-1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \left(-\ln|x| + \ln|1+x^2|\right)\Big|_{1/2}^{2} =$$

$$= \left(\ln\left(\frac{1+x^2}{x}\right)\right)\Big|_{1/2}^{2} = \left(\ln\left(\frac{1}{x}+x\right)\right)\Big|_{1/2}^{2} =$$

$$= \ln\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - \ln\left(2+\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

c) $$\int_{4/\sqrt{3}}^{4} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \left[\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sin u} \\ dx = -2\dfrac{\cos u}{\sin^2 u}\,du \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \Rightarrow \sin u = \frac{1}{2} \\ x = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin u = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \right]$$

$$= \int_{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sin u = \frac{1}{2}} \frac{-2\dfrac{\cos u}{\sin^2 u}\,du}{\left(\frac{2}{\sin u}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{2}{\sin u}\right)^2 - 4}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sin u = \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2 u} \cos u \, du}{\frac{1}{\sin^2 u}\sqrt{\frac{4}{\sin^2 u} - 4}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sin u = \frac{1}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{4\left(\frac{1}{\sin^2 u} - 1\right)}} \, du =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sin u = \frac{1}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u}}} \, du =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\sin u = \frac{1}{2}}^{\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}} \, du = \left[\text{Utför integrationen i första kvadranten}\right] =$$

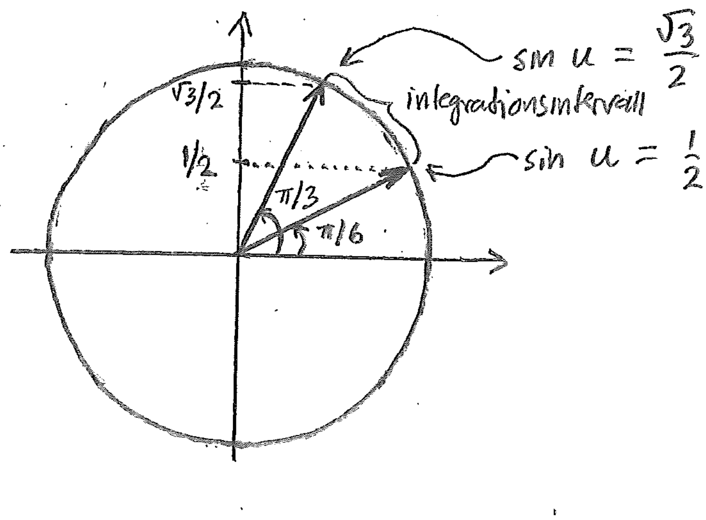
$$= \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos u}{\frac{\cos u}{\sin u}} \, du = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin u \, du =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\cos u\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{8} \qquad (\approx 0.0915)$$

<u>Anmärkning:</u> I första kvadranten gäller $\sin u, \cos u \geq 0$

så att $\sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}} = \frac{|\cos u|}{|\sin u|} = \frac{\cos u}{\sin u}$



③ Generaliserad integral $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Låt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$. Vill jämföra detta med en p-integral. Inför $g(x) = x^{-3/2}$. Vi har att

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-3/2} = g(x)$$

Enligt satsen på s. 3 i F7 så gäller att om $\int_1^\infty g(x)\,dx$ konvergerar så gör också $\int_1^\infty f(x)\,dx$ det. Vi har att

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty x^{-3/2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-3/2}\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-2x^{-1/2}\right)\Big|_1^R =$$

$$= -2 \lim_{R\to\infty} \left(R^{-1/2} - 1^{-1/2}\right) =$$

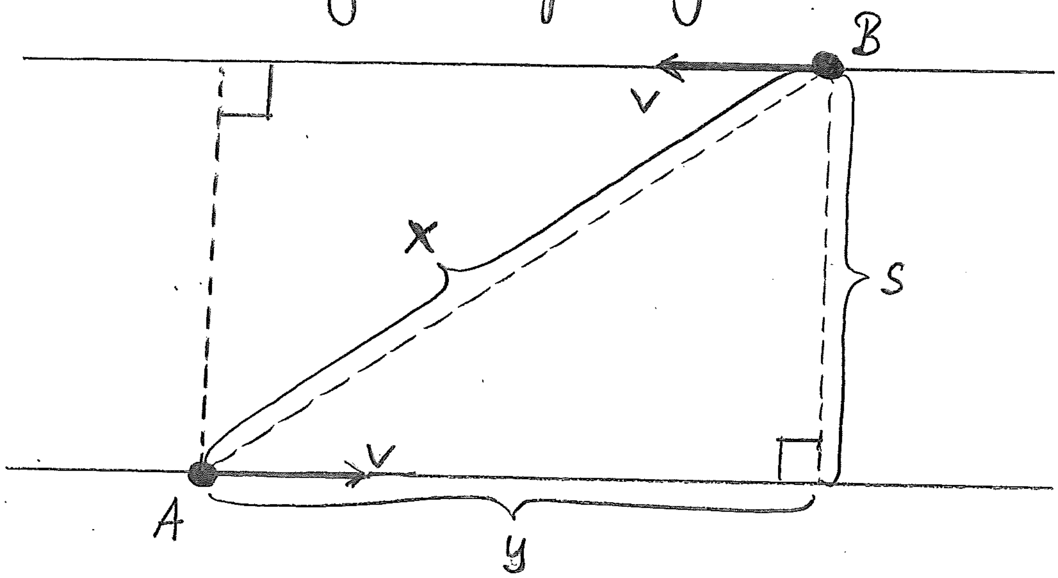
$$= -2\left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{R}} - 1\right) =$$

$$= -2(0-1) = 2 < \infty,$$

d.v.s. $\int_1^\infty g(x)\,dx$ konvergerar, och därför måste även $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergera!

4.

Beteckningar enligt figuren nedan:



Det gäller att $s = 8$ sjömil

$V = 20$ knop $= 20$ sjömil/h

Vill veta $\frac{dx}{dt}$ då $x = 10$ sjömil.

Notera att $\frac{dy}{dt} = -2V = -40$ sjömil/h.

(ty y minskar)

Pythagoras sats:

$$y^2 + s^2 = x^2$$

$$y^2 + 8^2 = x^2$$

$$y^2 + 64 = x^2 \qquad (*)$$

Derivera implicit m.a.p. t:

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x}\frac{dy}{dt} \qquad (**)$$

Ur $(*)$ fås: $y = \sqrt{x^2 - 64}$

Sätt in detta i (**):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2-64}}{x}\,\frac{dy}{dt} = \left[\begin{array}{l} x = 10 \text{ sjömil} \\ \frac{dy}{dt} = -40 \text{ sjömil/h} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{10^2-64}}{10}(-40) \text{ sjömil/h} =$$

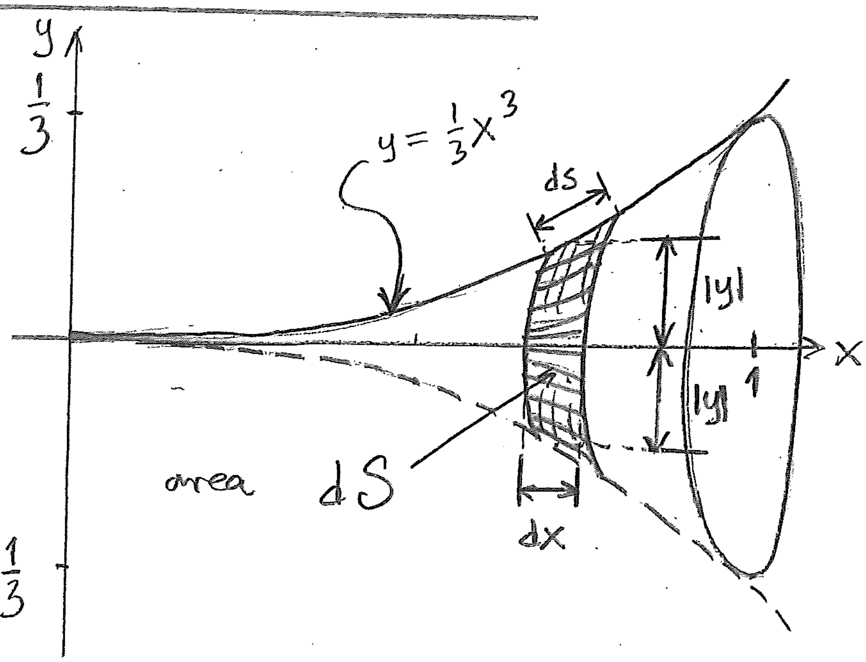
$$= -4\sqrt{36} \text{ sjömil/h} = -4 \cdot 6 \text{ sjömil/h} =$$

$$= -24 \text{ sjömil/h} = -24 \text{ knop},$$

d.v.s. avståndet mellan fartygen minskar med hastigheten 24 knop när de är 10 sjömil från varandra.

---

5. Figur:



Betrakta ett band med bredden dx i x-led, en ring med radien $|y| = \frac{1}{3}x^3$ och bredden $ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ längs ytan.

Då är bandets area dS givet genom

$$dS = \underbrace{2\pi|y|}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{bredd}} = 2\pi\frac{1}{3}x^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Vi har att

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\cdot 3x^2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1+(x^2)^2} = \sqrt{1+x^4}$$

Rotationsytans totala area S fås som

$$S = \int_{x=0}^{x=1} dS = \int_0^1 2\pi \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1+x^4}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3 (1+x^4)^{1/2} dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{4} \frac{2}{3} (1+x^4)^{3/2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{9} \left((1+x^4)^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{9} \left(2^{3/2} - 1^{3/2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1) \text{ areaenheter } (\approx 0.638 \text{ a.e.})$$

6.

Det gäller att

$$\sqrt{1.5} = \sqrt{1+0.5} = [0.5 \in (-1,1)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n \qquad (*)$$

Vi vill ha ett fel $< 5 \times 10^{-3} = \frac{1}{200}$ vid trunkering av Maclaurinserien $(*)$.

Detta är en alternerande serie (för $n \in \mathbb{Z}_+$) och därför gäller att absolutbeloppet av felet är som störst absolutbeloppet av den första kastade termen, d.v.s.

$$|\text{fel}| \leq \left|\frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n\right| < \frac{1}{200} \qquad (\dagger)$$

om $\frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n$ är första kastade termen i Maclaurinutvecklingen. Olikheten i $(\dagger)$ kan skrivas som (om $n \in \mathbb{Z}_+$):

$$\frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 4^n} 0.5^n < \frac{1}{200}$$

$$\frac{(2n-1)(n!)^2 8^n}{(2n)!} > 200 \qquad (**)$$

Vi testar $n=3$:

$$VL_{(**)}(n=3) = \frac{5 \cdot (3!)^2 \cdot 8^3}{6!} = \frac{5 \cdot 6^2 \cdot 512}{720} =$$

$$= \frac{5 \cdot 36 \cdot 512}{36 \cdot 20} = \frac{5 \cdot 512}{20} = \frac{512}{4} = 128,$$

vilket är $< 200 = HL_{(**)}$. Vi testar $n=4$:

$$VL_{(**)}(n=4) = \frac{7 \cdot (4!)^2 \cdot 8^4}{8!} = \frac{7 \cdot 24^2 \cdot 8^4}{8 \cdot 7 \cdot 6!} =$$

$$= \frac{24^2 \cdot 8^3}{720} = \frac{6^2 \cdot 4^2 \cdot 8^3}{36 \cdot 20} =$$

$$= \frac{4^2 \cdot 8^3}{20} = \frac{4^2 \cdot 8^3}{4 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 8^3}{5} = \frac{8^4}{10} =$$

$$= \frac{4096}{10} = 409.6,$$

vilket är $> 200 = HL_{(**)}$. Vi kastar alltså bort termerna $n = 4, 5, 6, \ldots$

Vi får alltså att

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} 0.5^n = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 8^n} =$$

$$= \frac{(-1)^0\, 0!}{1\cdot(0!)^2 8^0} + \frac{(-1)^1\, 2!}{(-1)(1!)^2 8^1} +$$

$$+ \frac{(-1)^2\, 4!}{(-3)(2!)^2 8^2} + \frac{(-1)^3\, 6!}{(-5)(3!)^2 8^3} =$$

$$= \frac{1\cdot 1}{1\cdot 1^2\cdot 1} + \frac{2}{1^2\cdot 8} + \frac{1\cdot 24}{(-3)\cdot 2^2\cdot 64} + \frac{720}{5\cdot 6^2\cdot 512} =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = \frac{128+32-4+1}{128} =$$

$$= \frac{157}{128} = 1.2265625,$$

vilket ska jämföras med det exakta värdet

$$\sqrt{1.5} = 1.2247448\ldots$$

d.v.s. felet är $0.0018176\ldots < 5\times 10^{-3}$.

---

7. $VL_n = 2n$, $HL_n = 2^n$, $n \in \{0,1,2,\ldots\}$

Ska visa $VL_n \le HL_n$ för alla $n \in \{0,1,2,\ldots\}$

Vi noterar först att

$$VL_0 = 2\cdot 0 = 0 < 1 = 2^0 = HL_0,$$

så $VL_n \le HL_n$ sant för $n=0$. Detta är dock ej vårt startsteg. Ska nu visa att $VL_n \le HL_n$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ genom induktion.

- Startsteg ($n=1$): $VL_1 \leq HL_1$?

$$VL_1 = 2\cdot 1 = 2 = 2^1 = HL_1,$$

startsteget verifierat.

- Induktionssteg: Gäller implikationen

$$VL_p \leq HL_p \Rightarrow VL_{p+1} \leq HL_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ ?$$

Antag $VL_p \leq HL_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$ (induktionsantagande).
Då gäller

$$VL_{p+1} = 2(p+1) = \underbrace{2p}_{=VL_p}+2 = VL_p + 2 \leq$$

$$\leq [\text{Induktionsantagandet}] \leq HL_p + 2 =$$

$$= 2^p + 2 \overset{[p \geq 1]}{\leq} 2^p + 2^p = 2\cdot 2^p =$$

$$= 2^{p+1} = HL_{p+1},$$

d.v.s. induktionssteget verifierat.
Enligt induktionsprincipen gäller därför

$$VL_n \leq HL_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

och tillsammans med $VL_0 < HL_0$ så fås att $VL_n \leq HL_n \quad \forall n \in \{0,1,2,\dots\}$.

---

8. a) "Homogen" DE $y' = \dfrac{8x^2+y^2}{xy}$.

Vet då att HL kan skrivas som en funktion av y/x. Vi ser att

$$y' = \frac{8x^2+y^2}{xy} = \frac{(8x^2+y^2)/x^2}{(xy)/x^2} =$$

$$= \frac{8+y^2/x^2}{y/x} = \frac{8}{y/x} + y/x \qquad (*)$$

(Om $y' = f(y/x)$ så gäller alltså att funktionen ges av $f(t) = \frac{8}{t} + t$.)

Ansätt $v = y/x \Leftrightarrow y = x.v \Rightarrow y' = 1 \cdot v + x \cdot v' =$
$= v + xv'$

Vi får då att (*) kan skrivas

$$v + xv' = \frac{8}{v} + v$$

$$xv' = \frac{8}{v}$$

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{8}{x} \qquad \text{(separabel!)}$$

$$\int v\,dv = 8\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = 8\ln|x| + C$$

Sidovillkoret $y(1) = 4$ betyder i termer av v att $v(1) = y(1)/1 = 4/1 = 4$, så att

$$\frac{1}{2}4^2 = 8 \cdot \ln|1| + C$$

$$8 = 8 \cdot 0 + C$$

$$C = 8$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 = 8\ln|x| + 8$$

$$v^2 = 16(\ln|x| + 1)$$

$$v = 4\sqrt{\ln|x| + 1}$$

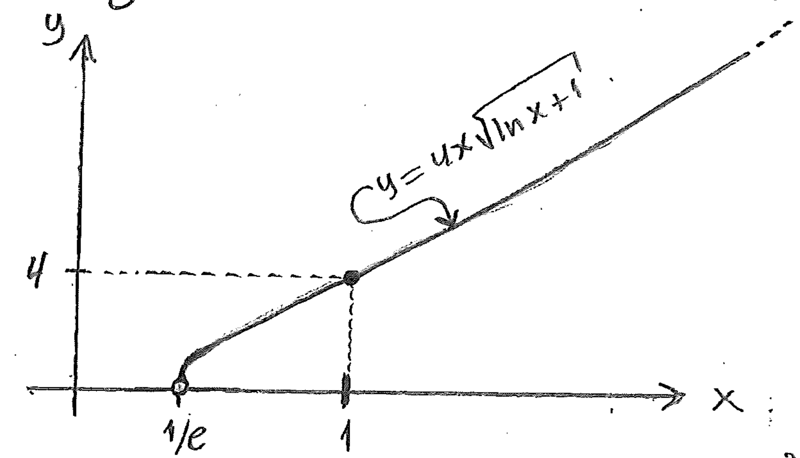
$$y/x = 4\sqrt{\ln|x|+1}$$
$$y = 4x\sqrt{\ln|x|+1}$$

Om vi noterar att $x > 0$ (ty $x=0$ kan ej passeras ty "$\ln 0$" odefinierat) så fås

$$y = 4x\sqrt{\ln x+1}$$

(Anmärkning: $\ln x+1 > 0$ måste gälla, d.v.s. $\ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$. Lösningen gäller alltså för $x > 1/e$.)

$\ln x+1 > 0$ ty
(1) $\ln x+1 \geq 0$ i roten
(2) $y \neq 0$ i DE:n



b) Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ och steglängd $h=0.25$, lösa över $[0,1]$ med den förbättrade Eulerstegmetoden.

Det gäller att $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ med

$f(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x^2}$, $x_0 = 0$ och $y_0 = 1$.

Iterationsformler för den förbättrade Eulerstegmetoden i detta fall:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.25 \\ u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.25 \cdot \dfrac{y_n^2}{1+x_n^2} = \\ \quad = y_n\left(1 + \dfrac{0.25 \cdot y_n}{1+x_n^2}\right) \\ y_{n+1} = y_n + h\dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} = \\ \quad = y_n + 0,125 \cdot \left(\dfrac{y_n^2}{1+x_n^2} + \dfrac{u_{n+1}^2}{1+x_{n+1}^2}\right) \end{cases}$$

Detta ger stegen:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0.25 = 0 + 0.25 = 0.25 \\ u_1 = y_0\left(1 + \dfrac{0.25 \cdot y_0}{1+x_0^2}\right) = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0.25 \cdot 1}{1+0^2}\right) = \\ \quad = 1 + \dfrac{0.25}{1} = 1.25 \\ y_1 = y_0 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{y_0^2}{1+x_0^2} + \dfrac{u_1^2}{1+x_1^2}\right) = \\ \quad = 1 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{1}{1+0} + \dfrac{1.25^2}{1+0.25^2}\right) = \\ \quad = 1 + 0.125 + 0.125 \cdot \dfrac{1.5625}{1.0625} \approx 1.3088 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0.25 = 0.5 \\ u_2 = y_1\left(1 + \dfrac{0.25 \cdot y_1}{1+x_1^2}\right) \approx 1.3088 \cdot \left(1 + \dfrac{0.25 \cdot 1.3088}{1+0.25^2}\right) \approx \\ \quad \approx 1.7119 \\ y_2 = y_1 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{y_1^2}{1+x_1^2} + \dfrac{u_2^2}{1+x_2^2}\right) \approx \\ \quad \approx 1.3088 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{1.3088^2}{1+0.25^2} + \dfrac{1.7119^2}{1+0.5^2}\right) \approx \\ \quad \approx 1.8034 \end{cases}$$

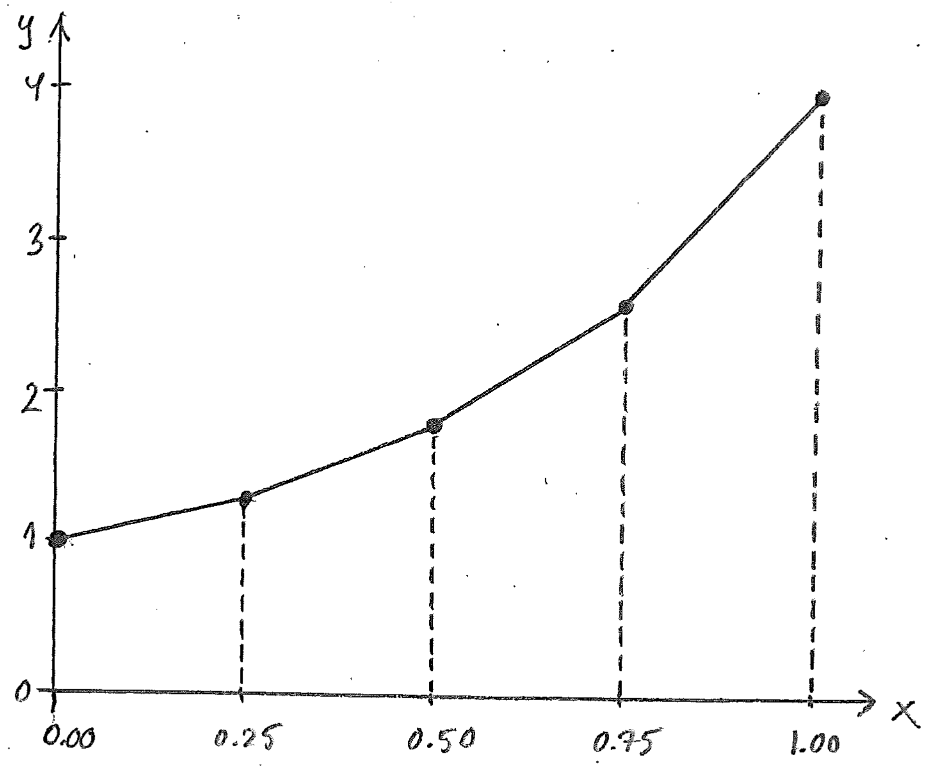
$$\begin{cases} x_3 = x_2 + 0.25 = 0.75 \\ u_3 = y_2\left(1 + \dfrac{0.25 \cdot y_2}{1+x_2^2}\right) \approx 1.8034 \cdot \left(1 + \dfrac{0.25 \cdot 1.8034}{1+0.5^2}\right) \approx \\ \quad \approx 2.4539 \\ y_3 = y_2 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{y_2^2}{1+x_2^2} + \dfrac{u_3^2}{1+x_3^2}\right) \approx \\ \quad \approx 1.8034 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{1.8034^2}{1+0.5^2} + \dfrac{2.4539^2}{1+0.75^2}\right) \approx \\ \quad \approx 2.6104 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + 0.25 = 1 \\ u_4 = y_3\left(1 + \dfrac{0.25 \cdot y_3}{1+x_3^2}\right) \approx 2.6104 \cdot \left(1 + \dfrac{0.25 \cdot 2.6104}{1+0.75^2}\right) \approx \\ \quad \approx 3.7006 \\ y_4 = y_3 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{y_3^2}{1+x_3^2} + \dfrac{u_4^2}{1+x_4^2}\right) \approx \\ \quad \approx 2.6104 + 0.125 \cdot \left(\dfrac{2.6104^2}{1+0.75^2} + \dfrac{3.7006^2}{2}\right) \approx \\ \quad \approx 4.0114 \end{cases}$$

Den numeriska lösningen ges enligt tabellen:

x	y
0.00	1.0000
0.25	1.3088
0.50	1.8034
0.75	2.6104
1.00	4.0114

Se figur:



(Notera att den exakta lösningen är

$$y = \frac{1}{1 - \arctan x}$$

vilket kan härledas genom att $y' = \frac{y^2}{1+x^2}$ är separabel. Felet $e_n = y_n - y(x_n)$ visar sig vara

$$\begin{cases} e_0 = 0 \\ e_1 \approx -0.0156 \\ e_2 \approx -0.0610 \\ e_3 \approx -0.1947 \\ e_4 \approx -0.6484 \end{cases}$$

Felet kommer i grafen ovan inte börja märkas förrän vid $x = 0.75$.)

A. Se Föreläsning 6 sid. 1 & 2.