RÄKNEÖVNING 1

1.1:6 Partikel med position x given som

$$x = 3t^2 - 12t + 1 \quad m$$

Vilken hastighet vid $t=1, t=2, t=3$?

Lösning: Medelhastighet under tidsintervallet $[t, t+h]$ är

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3(t+h)^2 - 12(t+h) + 1) - (3t^2 - 12t + 1)}{(t+h) - t} =$$

$$= \frac{3t^2 + 6th + 3h^2 - 12t - 12h + 1 - 3t^2 + 12t - 1}{h} =$$

$$= \frac{6th + 3h^2 - 12h}{h} = 6t + 3h - 12 \quad m/s$$

Då $h \to 0$ så $\frac{\Delta x}{\Delta t} = 6t - 12$ m/s

vilket är momentana hastigheten.

$t=1$: Hastighet $= 6 \cdot 1 - 12 = -6$ m/s

$t=2$: —— " —— $= 6 \cdot 2 - 12 = 0$ m/s

$t=3$: —— " —— $= 6 \cdot 3 - 12 = 6$ m/s

1.2:36 $\lim_{x\to 0} \frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$ = [Förläng m. konj.] =

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(|3x-1|-|3x+1|)(|3x-1|+|3x+1|)}{x(|3x-1|+|3x+1|)} =$$

$[|a|^2=a^2]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{x(|3x-1|+|3x+1|)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9x^2-6x+1-9x^2-6x-1}{x(|3x-1|+|3x+1|)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-12x}{x(|3x-1|+|3x+1|)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-12}{|3x-1|+|3x+1|} = \frac{-12}{1+1} = -6$$

1.2:58 $\lim_{x\to a+} \frac{|x-a|}{x^2-a^2} = [x>a \Rightarrow |x-a| = x-a] =$

$$= \lim_{x\to a+} \frac{x-a}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a+} \frac{x-a}{(x+a)(x-a)} =$$

$$= \lim_{x\to a+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}$$

1.2:78 $g(x) = x \sin\frac{1}{x}$. Vad är D_g? $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$?

Vi ser att $\frac{1}{x}$ kräver $x \neq 0$, därför är $g(x)$ definierad för $x \neq 0$, d.v.s.

$$D_g = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Vi ser att

$$|g(x)| = |x \sin \tfrac{1}{x}| = |x||\sin \tfrac{1}{x}| \leq$$
$$\leq |x| \cdot 1 = |x|$$

eftersom $\quad -1 \leq \sin t \leq 1 \quad \forall t$

Detta innebär att

$$-|x| \leq g(x) \leq |x|$$

Låt $f(x) = -|x|$, $h(x) = |x|$, då har vi

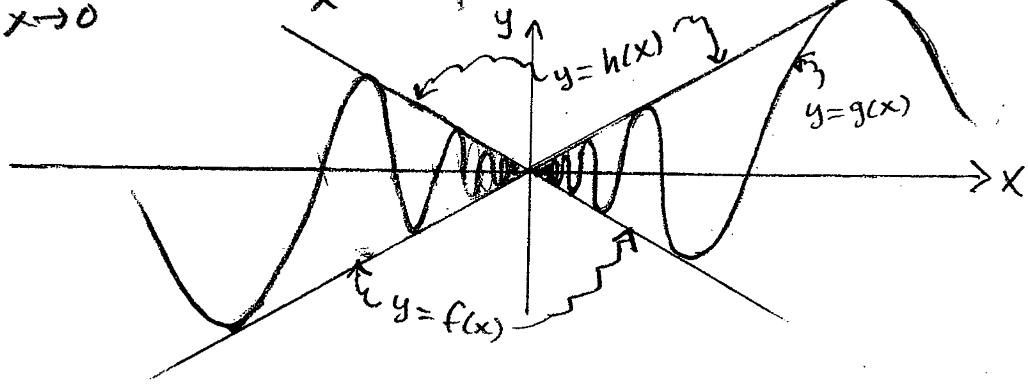
alltså $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-|x|) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

Samt $\underbrace{f(x)}_{\to 0} \leq g(x) \leq \underbrace{h(x)}_{\to 0}$. Enligt

instängningssatsen gäller då $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$,

d.v.s. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.



<u>1.3:16</u> $\displaystyle \lim_{x\to -2/5} \frac{2x+5}{5x+2} = \lim_{x\to -2/5} \frac{2x+5}{5(x+2/5)}$

<u>Vänstergränsvärde:</u> $\displaystyle \lim_{x\to -\frac{2}{5}-} \frac{2x+5}{5(x+2/5)} = -\infty$

ty $2(-\frac{2}{5})+5 = -\frac{4}{5}+\frac{25}{5} = \frac{21}{5} > 0$

och $x + 2/5 < 0$ om $x < -2/5$

<u>Högergränsvärde:</u> $\lim_{x\to -\frac{2}{5}+} \frac{2x+5}{5(x+2/5)} = \infty$

ty täljaren > 0 (igen) men

$x + 2/5 > 0$ om $x > -2/5$

Olika vänster- och högergränsvärden

$\Longrightarrow$ Inget (oändligt) gränsvärde finns.

1.3:30 $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x}\right) = $ [Förläng m. konj.] $=$

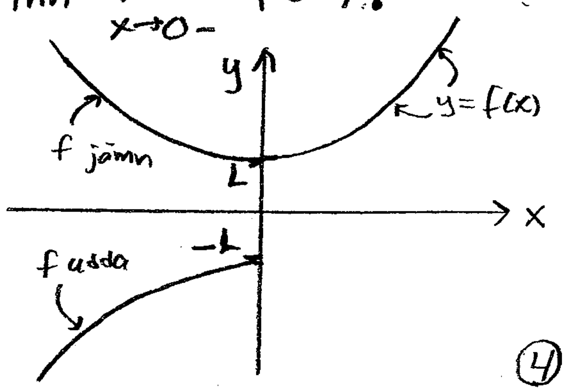
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x) - (x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-2x}} = [\sqrt{x^2} = x \text{ om } x \geq 0]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x\sqrt{1+2/x} + x\sqrt{1-2/x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+2/x} + \sqrt{1-2/x}} = \frac{4}{1+1} = 2$$

1.3:54 Vet $\lim_{x\to 0+} f(x) = L$. Finn $\lim_{x\to 0-} f(x)$!



a) f jämn: $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0-} f(x) = L$

b) f udda: $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0-} f(x) = -L$