

# RÄKNEÖVNING 10

9.3:14 Avgör huruvida serien  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$  konvergerar eller divergerar.

Lösning: Låt oss använda integralkriteriet.

Bilda  $f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^2}$ . Då har

vi att  $a_n = f(n)$  där  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  är serien.

Vi ser att  $f$  är positiv, kontinuerlig och ickväxande (t.o.m. avtagande) på  $[3, \infty)$ .

Enligt integralkriteriet konvergerar  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$  om och endast om  $\int_3^{\infty} f(x) dx$  konvergerar:

$$\begin{aligned} \int_3^{\infty} f(x) dx &= \int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^2} = \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = \ln \ln x \\ du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x \ln x} \end{array} \right]_{x=3 \Rightarrow u=\ln \ln 3}^{x=\infty \Rightarrow u=\infty} = \\ &= \int_{\ln \ln 3}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln \ln 3}^R u^{-2} du = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -u^{-1} \right) \Big|_{\ln \ln 3}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln \ln 3} - \frac{1}{R} \right) = \\ &= \frac{1}{\ln \ln 3} - 0 = \frac{1}{\ln \ln 3} < \infty, \text{ konvergent} \\ &\quad \approx 0.094 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Serien konvergerar

9.3:26 Avgör huruvida serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$  konvergerar eller divergerar.

Lösning: Låt oss använda kvotkriteriet.

Vi har serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  med  $a_n = \frac{n^n}{\pi^n n!}$ .

Vi får då:

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\pi^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{\pi^n n!}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n n!}{\pi^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{\pi} < 1 \end{aligned}$$

= e (standard-gränsvärde)

Eftersom  $\rho < 1$  så konvergerar serien enligt kvotkriteriet.

---

9.3:38 Använd rotkriteriet för att visa att  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$  konvergerar.

Lösning: Vi har serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  med  $a_n = \frac{2^{n+1}}{n^n}$ .

Vi får:

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{n+1}}{n^n} \right)^{1/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1+1/n}}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} = \\ &= 2 \cdot 0 \cdot 2^0 = 0 < 1 \end{aligned}$$

Eftersom  $\sigma < 1$  så konvergerar serien enligt rotkriteriet.

9.4:6 Avgör huruvida serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$  konvergerar absolut, konvergerar betingat eller divergerar.

Lösning: Vi kollar huruvida  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , där  $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$ , konvergerar. Vi har

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}/(n+1)!}{(-2)^n/n!} \right| =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-2) \frac{n!}{(n+1)!n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

så enligt kvotkriteriet konvergerar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , d.v.s. serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$  är absolutkonvergent.

9.4:10 Avgör huruvida serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3}$

konvergerar absolut, konvergerar betingat eller divergerar.

Lösning: Serien är  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100(-1)^n}{2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  med  $a_n = \frac{100(-1)^n}{2n+3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Serien är alternerande.

Det gäller också att

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{100(-1)^{n+1}/(2(n+1)+3)}{100(-1)^n/(2n+3)} \right| = \left| (-1) \frac{2n+3}{2n+5} \right| =$$

$$= \frac{2n+3}{2n+5} \stackrel{[3<5]}{<} \frac{2n+5}{2n+5} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Dessutom har vi att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100(-1)^n}{2n+3} = 0$$

Enligt alternerande serie-kriteriet så är därför serien konvergent.

Är den absolutkonvergent, d.v.s. konvergerar också  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ?

Vi ser att

$$|a_n| = \left| \frac{100(-1)^n}{2n+3} \right| = \frac{100}{2n+3} \stackrel{[n \geq 1]}{\geq} \frac{100}{2n+3n} = \frac{20}{n} = 20b_n$$

där  $b_n = \frac{1}{n}$ . Eftersom den harmoniska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergerar (mot } \infty) \text{ och att}$$

$0 < b_n \leq \frac{1}{20}|a_n|$  så ger jämförelsekriteriet

att också  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  divergerar (mot  $\infty$ ).

Serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos n\pi}{2n+3}$  är alltså inte

absolutkonvergent. Men eftersom den var konvergent så är den i alla fall betingat konvergent.

9.4:22 Avgör för vilka  $x$ -värden som serien  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$  konvergerar absolut, konvergerar  
 betingat och divergerar.

Lösning: Låt  $a_n = \frac{(4x+1)^n}{n^3}$ , så serien är  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Låt oss undersöka konvergensten hos  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(4x+1)^{n+1}/(n+1)^3}{(4x+1)^n/n^3} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (4x+1) \left( \frac{n}{n+1} \right)^3 \right| = |4x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+1/n} \right)^3 = \\ &= |4x+1| \left( \frac{1}{1+0} \right)^3 = |4x+1| \quad (*) \end{aligned}$$

Vi vill använda kvotkriteriet.

$$\begin{aligned} (a) \quad 0 \leq \rho < 1 &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} |4x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 4x+1 < 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 < 4x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0 \end{aligned}$$

Enl. kvotkriteriet konvergerar serien absolut  
 för sådana  $x$ .

$$\begin{aligned} (b) \quad 1 < \rho \leq \infty &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} |4x+1| > 1 \Leftrightarrow 4x+1 < -1 \\ &\text{eller } 4x+1 > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \text{ eller } x > 0 \end{aligned}$$

Enl. kvotkriteriet divergerar  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  mot  $\infty$   
 för sådana  $x$ .

Antag  $x = -\frac{1}{2}$ :  $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3}$  vilket inne-  
 bär att  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergerar och serien

konvergerar absolut för  $x = -\frac{1}{2}$ .

Antag  $x=0$ :  $|a_n| = \frac{1^n}{n^3} = \frac{1}{n^3}$  vilket som ovan

innebär att serien konvergerar absolut.

Återstår att se om  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergerar eller divergerar för  $x < -\frac{1}{2}$  och  $x > 0$ .

(†)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vi vet att om } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ så divergerar} \\ \text{serien } \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \end{array} \right.$

Antag  $x < -\frac{1}{2}$  eller  $x > 0$ . Då har vi att

$|ux+1| > 1$  (se (b) ovan). Då måste

$a_n = \frac{(ux+1)^n}{n^3}$  för sådana  $x$  ge att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{om } x > 0$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existerar ej om  $x < -\frac{1}{2}$

d.v.s.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergerar enligt (†).