RÄKNEÖVNING 11

9.5:6 Bestäm konvergenscentrum, -radie och -cirkel för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}(4-x)^n$

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}(4-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}((-1)(x-4))^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{e^n}{n^3}(-1)^n}_{=a_n}(x-4)^n$$

Vi ser direkt att konvergenscentrum är $x=4$.

Konvergensradien ges av

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^3}(-1)^{n+1}}{\frac{e^n}{n^3}(-1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|(-1)e\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right| = e\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^3 =$$

$$= e\left(\frac{1}{1+0}\right)^3 = e \Rightarrow R = 1/e$$

d.v.s. konvergensradien är $1/e$.

För konvergenscirkeln måste vi undersöka $x = 4 \pm \frac{1}{e}$.

$x = 4+\frac{1}{e}$: Potensserien är då

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(-1)^n\left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

vilken konvergerar.

$x = 4-\frac{1}{e}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(-1)^n\left(-\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

vilken konvergerar.

Alltså måste gälla att konvergenscirkeln är $[4-\frac{1}{e}, 4+\frac{1}{e}]$.

9.5:10 Bestäm Cauchyprodukten mellan serierna

$1+x+x^2+x^3+\cdots$ och $1-x+x^2-x^3+\cdots$.

På vilket intervall och mot vilken funktion konvergerar produktserien?

Lösning: Potensserierna är

$$\begin{cases} 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ 1-x+x^2-x^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{cases}$$

där $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n$, $n=0,1,2,3,\ldots$.

Vi ser att serierna är geometriska serier:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x} \qquad (1)$$

$$1-x+x^2-x^3+\cdots = 1+(-x)+(-x^2)+(-x^3)+\cdots =$$

$$= \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \qquad (2)$$

och dessa konvergerar för $x\in(-1,1)$ resp. $-x\in(-1,1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\in(-1,1)$, dvs. $x\in(-1,1)$ för båda.

Cauchyprodukten $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$

ges av

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} 1\cdot(-1)^{n-j} =$$

$$= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j =$$

$$= (-1)^n\big(\underset{0}{1}+\underset{1}{(-1)}+\underset{2}{1}+\underset{3}{(-1)}+\cdots+\underset{n}{(-1)^n}\big) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^n\cdot 1; & n \text{ jämn} \\ (-1)^n\cdot 0, & n \text{ udda} \end{cases} = \begin{cases} 1, & n \text{ jämn} \\ 0, & n \text{ udda} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Cauchyprodukten är $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$.

Produkten konvergar för $x\in(-1,1)$ ty faktorerna konvergerar för sådana x.
Funktionen som Cauchyprodukten konvergerar mot är

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$

enligt (1) och (2) ovan.

9.5:20 Bestäm potensserierepresentationen för $\ln x$ i potenser av $x-4$. På vilket intervall är varje representationen giltig?

Lösning: Vi noterar att substitutionen $y=x-4$ ger

$$\ln x = \ln(4+y) = \ln\left[4\left(1+\frac{y}{4}\right)\right] =$$

$$= \ln 4 + \ln\left(1+\frac{y}{4}\right) =$$

$$= \ln 4 + \int_0^{y/4} \frac{d}{dt}\ln(1+t)\,dt =$$

$$= \ln 4 + \int_0^{y/4} \frac{dt}{1+t} = \ln 4 + \int_0 \frac{dt}{1-(-t)}$$

Men

$$\frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad -t\in(-1,1)$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln 4 + \int_0^{y/4} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\,dt =$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{y/4} t^n\,dt =$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right)\Big|_0^{y/4} =$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}\left(\frac{y}{4}\right)^{n+1} =$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{4^{n+1}} y^{n+1} = \{ y = x-4 \} =$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} (x-4)^{n+1} =$$

$$= \ln 4 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{32} + \frac{(x-4)^3}{192} - \frac{(x-4)^4}{1024} + \dots$$

Vi får konvergens för $-t \in (-1,1) \Leftrightarrow t \in (-1,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{y}{4} \in (-1,1) \Leftrightarrow y \in (-4,4) \Leftrightarrow x-4 \in (-4,4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (0,8)$

d.v.s. representationen giltig för alla $x \in (0,8)$.

Giltig även i ändpunkterna?

$x=0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} (-4)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-1)^{n+1} =$

$\displaystyle= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, divergent mot $-\infty$

$x=8$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} 4^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, alternerande

harmonisk serie så konvergent

Representationen giltig för alla $x \in (0,8]$.

<u>9.6:10</u> Bestäm Maclaurinserierepresentationen för $\ln(2+x^2)$. För vilka x är representationen giltig?

<u>Lösning:</u> $\ln(2+x^2) = \ln\left[2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right) =$

$$= \left\{ \frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \right\} =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} x^{2n} =$$

$$= \ln 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24} - \dots$$

Representationen giltig för $\frac{x^2}{2} \in (-1,1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \in (-2,2] \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

9.6:26 Bestäm Taylorserierepresentationen till $f(x) = xe^x$ i potenser av $x+2$. Var är den giltig?

Lösning: Sätt $t = x+2$, d.v.s. $x = t-2$. Då fås:

$$f(x) = xe^x = (t-2)e^{t-2} = [\text{Maclaurinserie (i } t=0)] =$$

$$= (t-2)e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2}t^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2e^{-2}t^n}{n!} =$$

$$= \left[m = n+1 \text{ i första serien}, \begin{cases} n=\infty \Rightarrow m=\infty \\ n=0 \Rightarrow m=1 \end{cases} \right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2}t^m}{(m-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2e^{-2}t^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2}t^n}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-2}t^n}{n!} - \underbrace{2e^{-2}}_{n=0 \text{ i andra serien}} =$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}\right)t^n =$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2}\left(\frac{n}{n!} - \frac{2}{n!}\right)t^n =$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2} \frac{n-2}{n!} t^n = [t = x+2] =$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2} \frac{n-2}{n!} (x+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^2} \frac{n-2}{n!} (x+2)^n$$

Denna är giltig för $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$,

d.v.s. representationen giltig för alla reella x.

9.6:34 Bestäm summan av serien

$$x^3 - \frac{x^9}{3!\cdot 4} + \frac{x^{15}}{5!\cdot 16} - \frac{x^{21}}{7!\cdot 64} + \frac{x^{27}}{9!\cdot 256} - \dots .$$

Lösning: Vi ser att

$$x^3 - \frac{x^9}{3!\cdot 4} + \frac{x^{15}}{5!\cdot 16} - \frac{x^{21}}{7!\cdot 64} + \frac{x^{27}}{9!\cdot 256} - \dots =$$

$$= x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!\cdot 4} + \frac{(x^3)^5}{5!\cdot 16} - \frac{(x^3)^7}{7!\cdot 64} + \frac{(x^3)^9}{9!\cdot 256} - \dots =$$

$$= x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!\cdot 2^2} + \frac{(x^3)^5}{5!\cdot 2^4} - \frac{(x^3)^7}{7!\cdot 2^6} + \frac{(x^3)^7}{9!\cdot 2^8} - \dots =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{1!\cdot 2} - \frac{(x^3)^3}{3!\cdot 2^3} + \frac{(x^3)^5}{5!\cdot 2^5} - \frac{(x^3)^7}{7!\cdot 2^7} + \frac{(x^3)^9}{9!\cdot 2^9} - \dots\right] =$$

$$= 2\left[\frac{1}{1!}\,\frac{x^3}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^3}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{x^3}{2}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{x^3}{2}\right)^7 + \frac{1}{9!}\left(\frac{x^3}{2}\right)^9 - \dots\right] =$$

$$= 2\sin\frac{x^3}{2} .$$

där vi får konvergens för: $\frac{x^3}{2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$,

d.v.s. serien giltig för alla reella x.