RÄKNEÖVNING 12

IB: 1.36 Bevisa $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$

Lösning: Låt $VL_n = \sum_{k=1}^{n} k(3k+1)$, $HL_n = n(n+1)^2$

Vi börjar med startsteget:

$$\begin{cases} VL_1 = \sum_{k=1}^{1} k(3k+1) = 1\cdot(3\cdot 1+1) = 1\cdot 4 = 4 \\ HL_1 = 1\cdot(1+1)^2 = 1\cdot 2^2 = 1\cdot 4 = 4 \end{cases}$$

d.v.s. $VL_1 = HL_1$ så startsteget klart.

Vi gör nu induktionsantagandet $VL_p = HL_p$.

Då gäller för $n = p+1$:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k(3k+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} k(3k+1) + (p+1)\big(3(p+1)+1\big) =$$

$$= VL_p + (p+1)(3p+4) = [\text{Ind.ant.}] =$$

$$= HL_p + (p+1)(3p+4) =$$

$$= p(p+1)^2 + (p+1)(3p+4) =$$

$$= (p+1)[p(p+1) + (3p+4)] =$$

$$= (p+1)(p^2+4p+4) = (p+1)(p+2)^2 =$$

$$= (p+1)((p+1)+1)^2 = HL_{p+1}$$

d.v.s. $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ och vi har verifierat induktionssteget. Det måste därför gälla att $VL_n = HL_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

IB:1.40 Visa att för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \qquad (*)$$

Lösning: Multiplicera $(*)$ med $\sqrt{n}>0$ vilket ger den ekvivalenta olikheten

$$\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n-1}}+1 \geq n$$

d.v.s. $$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{k}} \geq n \qquad (\dagger)$$

Kalla $VL_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{k}}$, $HL_n = n$. Vi ska alltså visa $(\dagger)$ $(\Leftrightarrow (*))$, d.v.s. $VL_n = HL_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

Vi börjar med startsteget $n=1$:

$$\begin{cases} VL_1 = \sum_{k=1}^{1}\sqrt{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \\ HL_1 = 1 \end{cases}$$

d.v.s. $VL_1 = HL_1$ så startsteget verifierat.

Gör nu induktionsantagandet $VL_p = HL_p$.

Vi får då för $n=p+1$:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}\sqrt{\frac{p+1}{k}} = \sum_{k=1}^{p}\sqrt{\frac{p+1}{k}} + \sqrt{\frac{p+1}{p+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sqrt{\frac{p+1}{k}} + 1 \geq \sum_{k=1}^{p}\sqrt{\frac{p}{k}} + 1 =$$

$$= VL_p + 1 \geq [\text{Induktionsantagande}] \geq$$

$$\geq HL_p + 1 = p+1 = HL_{p+1}$$

d.v.s. induktionsantagandet verifierat.

Vi har därför visat $(\dagger)$ och därmed $(*)$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$. ②

9.7:14 Använd Maclaurin- eller Taylorserier för att beräkna $\ln \frac{3}{2}$ med ett fel mindre än 5×10^{-5} till absoluta värdet.

Lösning: Vi har Maclaurinserieutvecklingen

$$\ln \frac{3}{2} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

där $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Det gäller att

(i) $\{a_n\}$ är alternerande

(ii) $\{|a_n|\}$ avtar i storlek

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Då är felet hos den trunkerade serien lika-tecknigt med och högst lika stort som absolutbeloppet på den första uteslutna termen.

Antag a_n är första uteslutna termen. Då måste gälla att

$$|a_n| < 5 \times 10^{-5} \Leftrightarrow \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| < \frac{1}{20000} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \cdot 2^n > 20000$$

Notera att: $10 \cdot 2^{10} = 10 \cdot 1024 = 10240 < 20000$ $(n=10)$

$11 \cdot 2^{11} = 11 \cdot 2048 = 22528 > 20000$ $(n=11)$

d.v.s. de 10 första termerna ger tillräckligt god noggrannhet i approximationen:

$$\ln \frac{3}{2} \approx \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{4\cdot 16} + \frac{1}{5\cdot 32} -$$

$$-\frac{1}{6\cdot 64} + \frac{1}{7\cdot 128} - \frac{1}{8\cdot 256} + \frac{1}{9\cdot 512} - \frac{1}{10\cdot 1024} =$$

3

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4608} - \frac{1}{10240} \approx 0.40543$$

(Felet mindre än 5×10^{-5}.)

9.7:18 Bestäm Maclaurinserien till

$$L(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt$$

Lösning: Vi Maclaurinserieutvecklar $\cos t^2$ i integralen och integrerar denna:

$$L(x) = \int_0^x \cos t^2 \, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (t^2)^{2n} \, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{4n} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{4n+1} t^{4n+1} \right) \Big|_0^x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot (4n+1)} x^{4n+1} \quad (\text{giltig } \forall x \in \mathbb{R})$$

9.7:20 Bestäm $L(0.5)$ med tre decimalers noggrannhet där L given i uppgift 9.7:18. (OBS: Feltryck i sjunde upplagan!)

Lösning: $$L(0.5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot (4n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

där $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot (4n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n+1}$.

Det är klart att felet har samma tecken som, och högst lika stor till absolutbeloppet som, den första uteslutna termen i approximationen.

Vi vill ha ett fel $< 5\times 10^{-4} = \frac{1}{2000}$,

d.v.s. $|a_n| < \frac{1}{2000} \Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot(4n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n+1}\right| < \frac{1}{2000}$

$\Leftrightarrow (2n)!\cdot(4n+1)\cdot 2^{4n+1} > 2000$

Vi har:

$n=1$: $(2\cdot 1)!\cdot(4\cdot 1+1)\cdot 2^{4\cdot 1+1} = 2!\cdot 5\cdot 2^5 =$

$= 2\cdot 5\cdot 32 = 320 < 2000$

$n=2$: $(2\cdot 2)!\cdot(4\cdot 2+1)\cdot 2^{4\cdot 2+1} = 4!\cdot 9\cdot 2^9 =$

$= 24\cdot 9\cdot 512 = 216\cdot 512 >$

$> 200\cdot 500 = 10^5 > 2000$

d.v.s. det räcker att summera fram till och med $n=1$, d.v.s. vi får

$$L(0.5) \approx a_0 + a_1 = \frac{1}{0!\cdot 1}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2!\cdot 5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{32} = \frac{1}{2} - \frac{1}{320} \approx 0.497$$

(Avrundat till tre decimaler.)

9.7:26 Bestäm $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{x(\cos(\sin x) - 1)}$

Lösning: Vi använder Maclaurinserieutvecklingar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - x}{x(\cos(\sin x)-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} - \dots - x}{x\left(1 - \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} - \dots - 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} - \dots - x}{x\left(-\frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} - \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^5-x}{x\left[-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^4-\cdots\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)-\frac{1}{3!}\left(x^3+\cdots\right)+\frac{1}{5!}\left(x^5+\cdots\right)}{x\left[-\frac{1}{2!}\left(x^2+\cdots\right)+\frac{1}{4!}\left(x^4+\cdots\right)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{3!}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\cdots}{-\frac{1}{2!}x^3+\cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^3+\cdots}{-\frac{1}{2}x^3+\cdots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3+\cdots}{-\frac{1}{2}x^3+\cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}+\cdots}{-\frac{1}{2}+\cdots} =$$

$$= \frac{-1/3}{-1/2} = \frac{2}{3}$$

(<u>Notera:</u> $\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}+\cdots}{-\frac{1}{2}+\cdots}$ betyder <u>egentligen</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots}{-\frac{1}{2}+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots}$$

för några konstanter $a_1, a_2, a_3, \ldots$ och $b_1, b_2, b_3, \ldots$.)