RÄKNEÖVNING 13

17.1:4 Låt DE:en $y''' + xy' = x\sin x$ vara given. Vilken ordning är den av? Linjär eller icke-linjär. Om linjär, är den homogen eller inhomogen?

Lösning: DE:en måste vara av 3:e ordningen. Den är dessutom linjär och inhomogen.

17.1:8 Låt DE:en $\cos x \frac{dx}{dt} + x\sin t = 0$ vara given. Vilken ordning? Linjär? Om linjär, är den homogen?

Lösning: DE:en är av 1:a ordningen och är icke-linjär (p.g.a. $\cos x$; x är ju funktionen).

7.9:8 Lös den separabla ekvationen $\frac{dy}{dx} = 1+y^2$.

Lösning: Vi kan något oegentligt skriva ekvationen på formen $\frac{dy}{1+y^2} = dx$ vilket egentligen betyder att vi integrerar $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 1\,dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x + C = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y \qquad (C \text{ konstant})$$

Så att $y = \tan(x+C)$ är lösningen

(Giltig så länge $x + C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

7.9:12 Lös den linjära ekvationen $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$.

Lösning: Vi kan skriva DE:en

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2}$$

Den integrerande faktorn ges av $e^{\mu(x)}$ där

$$\mu(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln|x| = \ln |x|^2 = \ln x^2$$

$$\Longrightarrow e^{\mu(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Vi får då

$$x^2 \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{2}{x} y = x^2 \frac{1}{x^2}$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

d.v.s. $\frac{d}{dx}(x^2 y) = 1$

Vilket efter integration blir $x^2 y = x + C$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$

7.9:20 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + (\cos x)y = 2xe^{-\sin x} & (*) \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Den integrerande faktorn ges av $e^{\mu(x)}$ där

$$\mu(x) = \int \cos x \, dx = \sin x \Rightarrow e^{\mu(x)} = e^{\sin x}$$

Vi multiplicerar $(*)$ med denna och får

$$e^{\sin x} y' + (e^{\sin x} \cos x) y = 2x$$

d.v.s. $\frac{d}{dx}(e^{\sin x} y) = 2x$

så att $e^{\sin x} y = \int 2x \, dx$

$$= x^2 + C$$

Vilket ger den allmänna lösningen

$$y = e^{-\sin x}(x^2 + C)$$

Men $y(\pi) = 0 \Leftrightarrow e^{-\sin \pi}(\pi^2 + C) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0}}_{=1}(\pi^2 + C) = 0 \Leftrightarrow \pi^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\pi^2$$

Lösningen är alltså $y = (x^2 - \pi^2)e^{-\sin x}$.

17.2:6 Lös den homogena differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - e^{-y/x}$$

Lösning: Låt $v = \frac{y}{x}$. Detta ger $y = vx$ vilket efter derivering blir $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v \cdot 1 = \frac{dv}{dx}x + v$

Insatt i DE:en blir detta

$$\frac{dv}{dx}x + v = v - e^{-v}$$

$$\frac{dv}{dx}x = -e^{-v} \qquad (\dagger)$$

Som är separabel (som väntat). Vi skriver $(\dagger)$ på formen

$$e^{v} dv = -\frac{1}{x} dx$$

vilken vi integrerar, d.v.s.

$$\int e^v dv = -\int \frac{dx}{x}$$

så att $\quad e^v = -\ln|x| + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}$

$$= -\ln|x| + \ln|C| \;, \quad C \neq 0$$

$$= \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

eller $\quad v = \ln \ln \left|\frac{C}{x}\right|$

vilket betyder $\quad \frac{y}{x} = \ln \ln \left|\frac{C}{x}\right|$

d.v.s. $\quad y = x \ln \ln \left|\frac{C}{x}\right|$

3.7:10 Bestäm den allmänna lösningen till

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \qquad (y = y(t))$$

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

med rötter $\quad r = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm \sqrt{4-5} =$

$$= 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm i$$

vilket ger allmän lösning

$$y(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t$$

där C_1, C_2 är konstanter.

3.7:14 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 25y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \qquad (y = y(t))$$

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^2 + 10r + 25 = 0$$

med rötterna $r = -5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 25} =$

$= -5 \pm \sqrt{25-25} = -5$ (dubbel)

Detta ger allmänna lösningen

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-5t}$$

där C_1, C_2 konstanter. Derivering ger

$$y'(t) = C_2 e^{-5t} + (C_1 + C_2 t)e^{-5t}(-5) =$$

$$= (C_2 - 5C_1 - 5C_2 t)e^{-5t}$$

Då fås begynnelsevillkoren

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (C_1 + C_2)e^{-5} = 0 \\ (C_2 - 5C_1 - 5C_2)e^{-5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -5C_1 - 4C_2 = 2e^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -5(-C_2) - 4C_2 = 2e^5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_2 = 2e^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -2e^5 \\ C_2 = 2e^5 \end{cases}$$

Då blir alltså lösningen

$$y(t) = (-2e^5 + 2e^5 t)e^{-5t}$$

d.v.s. $y(t) = 2(t-1)e^{-5(t-1)}$