RÄKNEÖVNING 14

17.5:6 Skriv den allmänna lösningen till den linjära DE med konstanta koefficienter som har den karaktäristiska ekvationen

$$(r^2-r-2)^2(r^2-4)^2 = 0.$$

Lösning: Rötterna till den karaktäristiska ekvationen (grad 8) fås genom att hitta nollställena till r^2-r-2 och r^2-4. Vi har

- $r^2-r-2=0 \Leftrightarrow r=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(-2)} = \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} = \begin{cases}2\\-1\end{cases}$
- $r^2-4=0 \Leftrightarrow r^2=4 \Leftrightarrow r=\pm 2$

Vi kan alltså faktorisera:

$$(r^2-r-2)^2(r^2-4)^2 = ((r-2)(r-(-1)))^2 \cdot ((r-2)(r-(-2)))^2 = (r-2)^2(r-(-1))^2(r-2)^2(r-(-2))^2 = (r-(-1))^2(r-2)^4(r-(-2))^2$$

d.v.s. rötterna är
- $r_{1,2} = -1$ (dubbelrot)
- $r_{3,\dots,6} = 2$ (fyrfaldig rot)
- $r_{7,8} = -2$ (dubbelrot)

Detta innebär att de 8 linjärt oberoende lösningarna till DE:en är

$$e^{-t}, te^{-t} \;;\; e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}, t^3e^{2t} \;;\; e^{-2t}, te^{-2t}$$

Den allmänna lösningen är därför

$$y(x) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + (C_3 + C_4 t + C_5 t^2 + C_6 t^3)e^{2t} + \\ + (C_7 + C_8 t)e^{-2t}, \quad C_1, \ldots, C_8 \in \mathbb{R}$$

17.5:10 Bestäm de allmänna lösningarna till Eulerekvationen

$$x^2 y'' - xy' + 5y = 0.$$

Lösning: Den karaktäristiska ekvationen är

$$r(r-1) - r + 5 = 0$$

d.v.s. $$r^2 - 2r + 5 = 0$$

med lösningar $$r = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Detta innebär att den allmänna lösningen är

$$y(x) = C_1 |x|^1 \cos(2\ln|x|) + C_2 |x|^1 \sin(2\ln|x|) = \\ = C_1 |x| \cos(2\ln|x|) + C_2 |x| \sin(2\ln|x|)$$

där C_1, C_2 godtyckliga reella konstanter.

17.6:6 Lös $y'' + 4y = x^2$.

Lösning: Homogen ekvation: $y'' + 4y = 0$.

Karaktäristisk ekvation: $r^2 + 4 = 0$

$$r^2 = -4$$

med lösningarna $$r = \pm 2i$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^{0 \cdot x} \cos 2x + C_2 e^{0 \cdot x} \sin 2x = \\ = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

där C_1, C_2 godtyckliga reella konstanter.

Vi försöker nu hitta en partikulärlösning y_p till den inhomogena, ursprungliga ekvationen. Det verkar här rimligt med ansatsen

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$\Rightarrow y_p' = 2Ax + B$$

$$\Rightarrow y_p'' = 2A$$

vilket vid insättning ger

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

$$4Ax^2 + 4Bx + (2A+4C) = x^2$$

Vi identifierar koefficienterna:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = 0 \\ 2A+4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 0 \\ C = -\frac{2}{4}A = -2/16 = -1/8 \end{cases}$$

d.v.s. $y_p = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$ vilket ger allmän lösning

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

17.6:10 Lös $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$

Lösning: Homogen ekvation: $y'' + 2y' + 2y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 2r + 2 = 0$

med lösningarna $r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$$\Longrightarrow \quad y_h = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$$

där C_1, C_2 godtyckliga reella konstanter

Vi försöker nu hitta en partikulärlösning y_p till den inhomogena, ursprungliga ekvationen. Eftersom $e^{-x} \sin x$ i högerledet till den inhomogena ekvationen löser den homogena ekvationen (se y_h ovan, välj $C_1 = 0, C_2 = 1$) så prövar vi en ansats av typen

$$y_p = Axe^{-x}\cos x + Bxe^{-x}\sin x$$

OBS!!!

d.v.s. liknande y_h med med andra konstanter och med faktor x. Derivera y_p:

$$y_p' = Ae^{-x}\cos x - Axe^{-x}\cos x - Axe^{-x}\sin x + Be^{-x}\sin x - Bxe^{-x}\sin x + Bxe^{-x}\cos x =$$

$$= (A + (B-A)x)e^{-x}\cos x + (B - (A+B)x)e^{-x}\sin x$$

$$y_p'' = (B-A)e^{-x}\cos x - (A+(B-A)x)e^{-x}\cos x - (A+(B-A)x)e^{-x}\sin x - (A+B)e^{-x}\sin x - (B-(A+B)x)e^{-x}\sin x + (B-(A+B)x)e^{-x}\cos x =$$

$$= (B - A - A - Bx + Ax + B - Ax - Bx)e^{-x}\cos x + (-A - Bx + Ax - A - B - B + Ax + Bx)e^{-x}\sin x =$$

$$= 2\big((B-A)-Bx\big)e^{-x}\cos x + 2\big((-A-B)+Ax\big)e^{-x}\sin x$$

vilket vid insättning ger

$$\begin{aligned} e^{-x}\sin x = {} & 2\big((B-A)-Bx\big)e^{-x}\cos x + \\ & + 2\big((-A-B)+Ax\big)e^{-x}\sin x + \\ & + 2\big(A+(B-A)x\big)e^{-x}\cos x + \\ & + 2\big(B-(A+B)x\big)e^{-x}\sin x + \\ & + 2Axe^{-x}\cos x + 2Bxe^{-x}\sin x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \big(2B-2A-2Bx+2A+2Bx-2Ax+2Ax\big)e^{-x}\cos x + \\ & + \big(-2A-2B+2Ax+2B-2Ax-2Bx+2Bx\big)e^{-x}\sin x = \\ & = 2Be^{-x}\cos x - 2Ae^{-x}\sin x \end{aligned}$$

Vi identifierar koefficienterna:

$$2B = 0,\ -2A = 1 \Leftrightarrow B=0,\ A=-\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x$$

vilket ger allmän lösning

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

(Vi struntar i (b).)

<u>17.3:4</u> (a) Använd Eulers stegmetod med steglängd $h=0.2$ för att approximera $y(2)$ givet att

$$y' = xe^{-y} \quad \text{och} \quad y(0)=0.$$

<u>Lösning:</u> Vi har $f(x,y) = xe^{-y}$, $x_0=0$; $y_0=0$

Iterationsformlerna för Eulers metod blir därmed

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.2 \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h x_n e^{-y_n} = y_n + 0.2 x_n e^{-y_n} \end{cases}$$

Vi får då:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0.2 = 0 + 0.2 = 0.2 \\ y_1 = y_0 + 0.2 x_0 e^{-y_0} = 0 + 0.2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0.2 = 0.2 + 0.2 = 0.4 \\ y_2 = y_1 + 0.2 x_1 e^{-y_1} = 0 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot e^{-0} = 0.04 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0.6 \\ y_3 = 0.04 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot e^{-0.04} = 0.1169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0.8 \\ y_4 = 0.1169 + 0.2 \cdot 0.6 \cdot e^{-0.1169} = 0.2236 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 1.0 \\ y_5 = 0.2236 + 0.2 \cdot 0.8 \cdot e^{-0.2236} = 0.3516 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = 1.2 \\ y_6 = 0.3516 + 0.2 \cdot 1.0 \cdot e^{-0.3516} = 0.4923 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = 1.4 \\ y_7 = 0.4923 + 0.2 \cdot 1.2 \cdot e^{-0.4923} = 0.6390 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_8 = 1.6 \\ y_8 = 0.6390 + 0.2 \cdot 1.4 \cdot e^{-0.6390} = 0.7868 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_9 = 1.8 \\ y_9 = 0.7868 + 0.2 \cdot 1.6 \cdot e^{-0.7868} = 0.9325 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{10} = 2.0 \\ y_{10} = 0.9325 + 0.2 \cdot 1.8 \cdot e^{-0.935} = 1.0742 \end{cases}$$

d.v.s. approximativt gäller $y(2) = 1.0742$.

(Notera: Exakt lösning $y(x) = \ln(\frac{1}{2}x^2 + 1)$ vilket ger $y(2) = \ln(\frac{1}{2}2^2 + 1) = \ln 3 \approx 1.0986$, d.v.s. vi har ett fel $e_{10} = y_{10} - y(2) \approx -0.0245$.)

17.3:8 (a) Använd Eulers förbättrade stegmetod med steglängd $h = 0.2$ för att approximera $y(1)$ givet att

$$y' = \cos y \quad \text{och} \quad y(0) = 0 \,.$$

Lösning: Vi har $f(x,y) = \cos y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

Iterationsformlerna för Eulers förbättrade metod blir därmed

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.2 \\ u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = \\ \quad = y_n + 0.2 \cdot \cos y_n \\ y_{n+1} = y_n + h \dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} = \\ \quad = y_n + \frac{1}{2} h \left(\cos y_n + \cos u_{n+1}\right) = \\ \quad = y_n + 0.1 \cdot \left(\cos y_n + \cos u_{n+1}\right) \end{cases}$$

Vi får då:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0.2 = 0 + 0.2 = 0.2 \\ u_1 = y_0 + 0.2 \cdot \cos y_0 = 0 + 0.2 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} = 0.2 \\ y_1 = y_0 + 0.1 \cdot (\cos y_0 + \cos u_1) = 0 + 0.1 \cdot (\cos 0 + \cos 0.2) = \\ \quad = 0.1 \cdot (1 + \cos 0.2) \approx 0.1980 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0.2 = 0.2 + 0.2 = 0.4 \\ u_2 = y_1 + 0.2 \cdot \cos y_1 = 0.1980 + 0.2 \cdot \cos 0.1980 \approx 0.3941 \\ y_2 = y_1 + 0.1 \cdot (\cos y_1 + \cos u_2) = \\ \quad = 0.1980 + 0.1 \cdot (\cos 0.1980 + \cos 0.3941) \approx 0.3884 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0.6 \\ u_3 = 0.3884 + 0.2 \cdot \cos 0.3884 \approx 0.5735 \\ y_3 = 0.3884 + 0.1 \cdot (\cos 0.3884 + \cos 0.5735) \approx 0.5649 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0.8 \\ u_4 = 0.5649 + 0.2 \cdot \cos 0.5649 \approx 0.7339 \\ y_4 = 0.5649 + 0.1 \cdot (\cos 0.5649 + \cos 0.7339) \approx 0.7237 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 1.0 \\ u_5 = 0.7237 + 0.2 \cdot \cos 0.7237 \approx 0.8735 \\ y_5 = 0.7237 + 0.1 \cdot (\cos 0.7237 + \cos 0.8735) \approx 0.8628 \end{cases}$$

d.v.s. approximativt gäller $y(1) = 0.8628$.

(Notera: Exakta lösningen ges av

$$y(x) = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$$

vilket ger exakta värdet för $y(1)$ enligt

$$y(1) = 2 \arctan(e^1) - \frac{\pi}{2} = $$
$$= 2 \arctan e - \frac{\pi}{2} \approx$$
$$\approx 0.8658$$

d.v.s. vi har ett approximationsfel

$$e_5 = y_5 - y(x_5) \approx -0.0030.)$$