RÄKNEÖVNING 2

1.4:6 $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ varken kontinuerlig eller diskontinuerlig i $x=0$. Varför?

Eftersom en funktion endast kan vara kontinuerlig eller diskontinuerlig i punkter i definitionsmängden så kan inte $\operatorname{sgn} x$ vara kont. eller diskont. i $x=0$ eftersom $\operatorname{sgn} x$ odefinierad i $x=0$.

1.4:18 $g(x) = \begin{cases} x-m, & x<3 \\ 1-mx, & x \geq 3 \end{cases}$. Bestäm m

så att g kontinuerlig överallt (läs: i $x=3$).

Vill ha $\lim_{x\to 3} g(x) = g(3)$ för kontinuitet

i $x=3$. $\lim_{x\to 3} g(x)$ väldefinierad omm

$$\lim_{x\to 3-} g(x) = \lim_{x\to 3+} g(x).$$

$$\lim_{x\to 3-} (x-m) = \lim_{x\to 3+} (1-mx)$$

$$3-m = 1-m\cdot 3$$

$$m = -1$$

Vilket ger $\lim_{x\to 3} g(x) = 4$

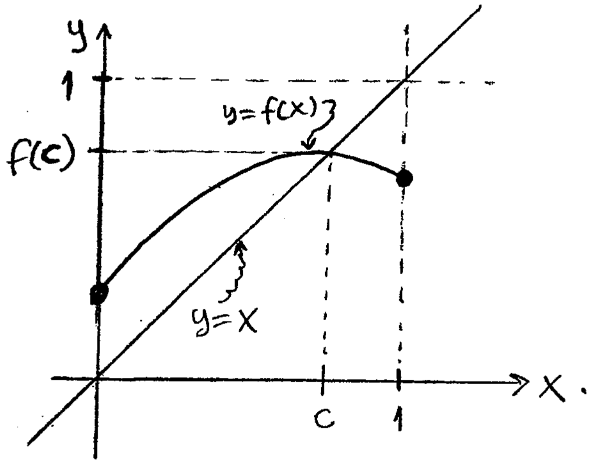
samma!

Eftersom $g(3) = 1-(-1)\cdot 3 = 4$

Så har vi kontinuitet i $x=3$.

Kontinuitet fås alltså omm $m=-1$.

1.4:32 (Fixpunktssatsen.) f antas kontinuerlig på $[0,1]$ och $0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in [0,1]$.
Då finns $c \in [0,1]$ s.a. $f(c) = c$.



Tolkning: Ekvationen $f(x) = x$ har en lösning $x = c$ på $[0,1]$ om f kont. på $[0,1]$.

Bevis: Vi antar att $f(0) > 0$, $f(1) < 1$.
(Annars fungerar ju $c=0$ eller $c=1$.)
Vi har ekvationen $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.
Låt $g(x) = f(x) - x$. Då blir ekvationen $g(x) = 0$, $x \in [0,1]$.
Enligt antagandet gäller:

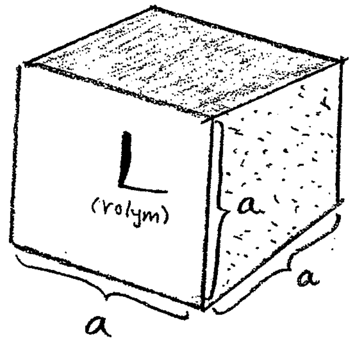
$$g(0) = f(0) - 0 > 0 - 0 = 0$$
$$g(1) = f(1) - 1 < 1 - 1 = 0$$

d.v.s. $g(1) \le 0 \le g(0)$. Enligt satsen om mellanliggande värde (g kont. på $[0,1]$) finns $c \in [0,1]$ s.a. $g(c) = 0$, d.v.s.

$$f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c.$$

Vi är klara med beviset.

1.5:2 Låt x vara kubens sidlängd.
Volymen $f(x)$ blir då $f(x) = x^3$.
Sidlängden önskas vara $a = 20$ och
volymen $L = 8000$.



(önskad låda)

Felet för högst vara
$1.2\% \times 8000 = 96$,
d.v.s. $\varepsilon = 96$ s.a.

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow |x^3 - 8000| < 96 \quad (**)$$

Vilket är det största δ man kan välja
s.a. $\underbrace{|x-a| < \delta}_{|x-20|<\delta}$ garanterar $(*)$?

$(**)$: Betyder
$$8000 - 96 < x^3 < 8000 + 96$$
$$7904^{1/3} < x < 8096^{1/3}$$
$$19.92 < x < 20.08$$

d.v.s. $|x - 20| < 0.08$

så att maximala felet i sidlängden
är $\delta \approx 0.08$ cm.

1.5:18 Visa $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$ m. formell def.

Lösning: Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. För $x \neq -1$:
$$\left|\frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{x+1}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{2}\right| =$$

3

$$= \left| \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2+(x-1)}{2(x-1)} \right| = \frac{1}{2} \frac{|x+1|}{|x-1|} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{|x-1|} \right) |x-(-1)|$$

Välj $\delta \leq 1$. Att $0 < |x-(-1)| < \delta \leq 1$ betyder

$-2 < x < 0$, vilket ger $-3 < x-1 < -1$

så att $|x-1| > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{1} = 1$

$$\Longrightarrow \left| \frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \right) |x-(-1)| =$$

$$= \frac{1}{2} |x-(-1)|$$

Detta ska vara mindre än ε,

vilket fungerar om vi väljer $\frac{1}{2}\delta < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\delta < 2\varepsilon$, ty $\frac{1}{2}|x-(-1)| < \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2} 2\varepsilon = \varepsilon$.

Välj därför $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$. Då fås:

$$0 < |x-(-1)| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

d.v.s. $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$

1.5:24 Formell definition på $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Detta är en kombination av gränsvärde i oändligheten och oändligt "gränsvärde". Vi får:

För varje $B > 0$ finns $R > 0$ s.a.

om $x > R$ så är $f(x) > B$

1.5:28

Bevisa $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

Lösning: Givet $B>0$ så ska vi visa att det finns $\delta>0$ så att

$$1-\delta < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < -B \qquad (*)$$

Men $\frac{1}{x-1} < -B \Leftrightarrow [x-1<0] \ 1 > -B(x-1)$

$\Leftrightarrow [-B<0] \ -\frac{1}{B} < x-1$

d.v.s. $-\frac{1}{B} < x-1 < 0$

$$1-\frac{1}{B} < x < 1$$

Detta fås om vi väljer $\delta = 1/B$, d.v.s. med detta val gäller implikationen (*).