

RÄKNEÖVNING 3

2.2:24

$f(t) = \frac{t^2-3}{t^2+3}$, beräkna $f'(t)$ ur definitionen.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(t+h)^2-3}{(t+h)^2+3} - \frac{t^2-3}{t^2+3} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{((t+h)^2-3)(t^2+3) - (t^2-3)((t+h)^2+3)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(t^2+2th+h^2-3)(t^2+3) - (t^2-3)(t^2+2th+h^2+3)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{1}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} \left((t^4+3t^2+2t^3h+6th+ \right. \\ &\quad \left. + t^2h^2+3h^2-3t^2-9) - (t^4+2t^3h+t^2h^2+3t^2-3t^2-6th-3h^2-9) \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h((t+h)^2+3)(t^2+3)} (12th+6h^2) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(2t+h)}{((t+h)^2+3)(t^2+3)} = \frac{6(2t+0)}{((t+0)^2+3)(t^2+3)} = \\ &= \frac{12t}{(t^2+3)(t^2+3)} = \frac{12t}{(t^2+3)^2} \end{aligned}$$

2.2:32 Tangentlinje till $y = \frac{t}{t^2-2}$ i $t=-2$ med derivatans definition.

Vi noterar att $y|_{t=-2} = \frac{-2}{(-2)^2-2} = \frac{-2}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$

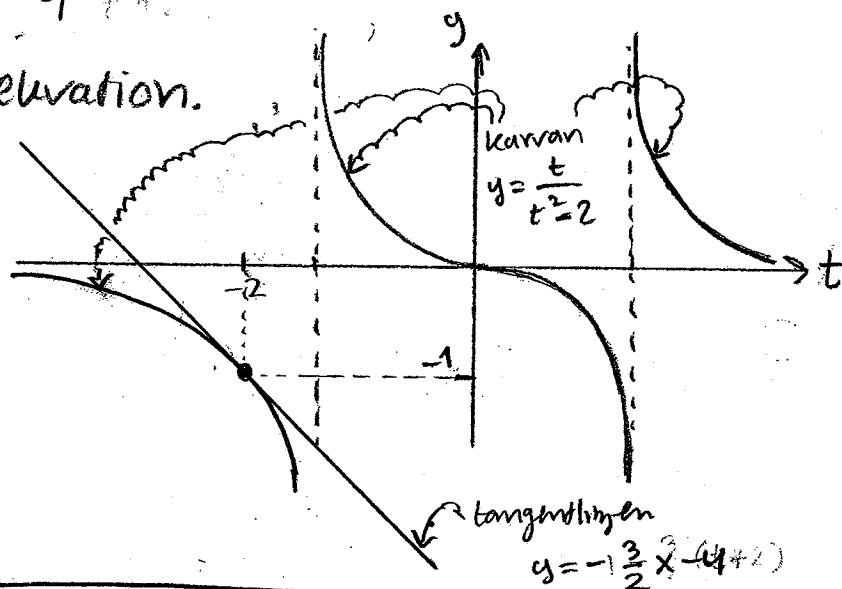
Lutningen hos kurvan i $t=-2$ blir då:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=-2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y|_{t=-2+h} - y|_{t=-2}}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-2+h}{(-2+h)^2 - 2} - (-1) \right) = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-2+h + (-2+h)^2 - 2}{(-2+h)^2 - 2} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-2+h+4-4h+h^2-2}{(-2+h)^2 - 2} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-3h+h^2}{(-2+h)^2 - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3+h}{(-2+h)^2 - 2} = \\
 &= \frac{-3+0}{(-2+0)^2 - 2} = \frac{-3}{4-2} = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Tangentlinjen går genom $(-2, -1)$ och har lutning $-\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Alltså: } y &= -1 + \left(-\frac{3}{2}\right)(t - (-2)) = -1 - \frac{3}{2}(t+2) \\
 &= -\frac{3}{2}t - 4
 \end{aligned}$$

är tangentlinjens ekvation.



2.2:46 Kurva $y=x^2$ och rät linje $x+4y=18$

Skär varandra i rät vinkel.

Skärningspunkter: Sätt in $y=x^2$ i $x+4y=18$

$$\Rightarrow x+4x^2=18$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{9}{2} = 0$$

$$x = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{9}{2}} = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{9 \cdot 32}{64}} =$$

$$= -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64}} = -\frac{1}{8} \pm \frac{17}{8} = \begin{cases} 16/8 = 2 \\ -18/8 = -9/4 \end{cases}$$

d.v.s. $x = -9/4$, $x = 2$ är skärningspunkterna.

Lotning hos $y = x^2$: $k_1 = \frac{dy}{dx} = 2x$

Lotning hos $x + 4y = 18 \Rightarrow y = \frac{9}{2} - \frac{1}{4}x$: $k_2 = -\frac{1}{4}$

Kurvan och linjen skär i rät vinkel då $k_1 k_2 = -1$.

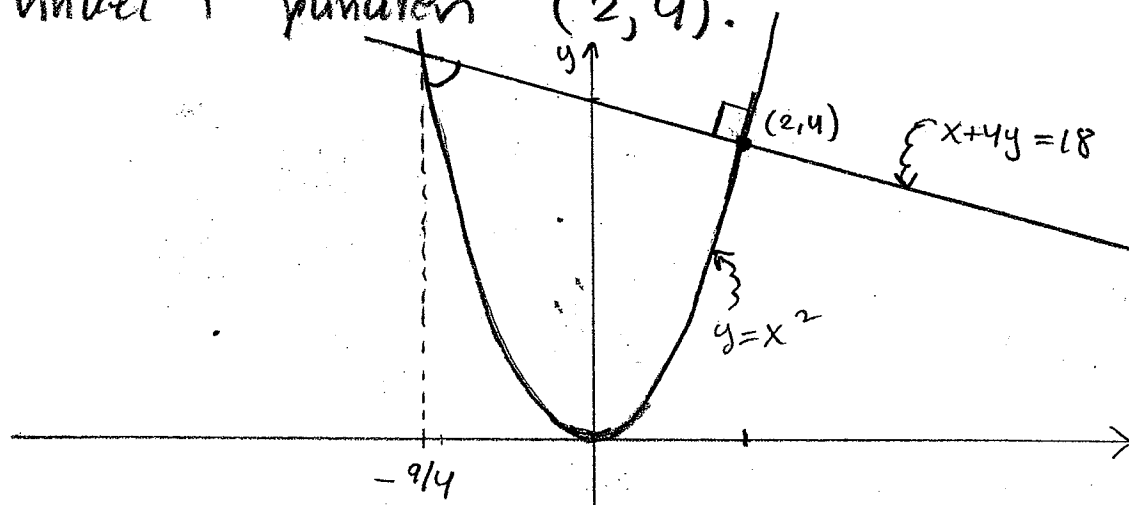
Punkten $x = -\frac{9}{4}$: $k_1|_{x=-\frac{9}{4}} = 2(-\frac{9}{4}) = -\frac{9}{2}$

Produkt: $(k_1 k_2)|_{x=-\frac{9}{4}} = (-\frac{9}{2})(-\frac{1}{4}) = \frac{9}{8} \neq -1$

Punkten $x = 2$: $k_1|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4$

Produkt: $(k_1 k_2)|_{x=2} = 4 \cdot (-\frac{1}{4}) = -1$

Kurvan och linjen skär alltså varandra i rät vinkel i punkten $(2, 4)$.



2.8:4 Visa $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$. (Och $x < 0$?)

Inför $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

$$\Rightarrow f'(x) = x - \sin x > 0$$

Exempel 2 i boken: $\sin x < x$, $x > 0$

$$\Rightarrow f'(x) > 0, x > 0 \quad (*)$$

Medelvärdessatsen ger att $\exists c \in (0, x)$ s.a.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \stackrel{(*)}{>} 0$$

$$\text{d.v.s. } \frac{(\cos x + \frac{x^2}{2}) - 1}{x} > 0, \quad \text{mult.}$$

$$\text{med } x > 0: \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 > 0 \quad (x > 0)$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x > 0)$$

Både $\cos x$ och $1 - \frac{x^2}{2}$ jämna funktioner
innebär att olikheten är sann även då $x < 0$.

2.8:14 Var är $f(x) = x - 2 \sin x$ växande/fallande?

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Alternerande intervall } (-\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi) = I_n$$

$$\text{och } (\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi) = J_n$$

d.v.s. $f'(x)$ har olika tecken på I_n och J_n .

$$0 \in I_0: f'(0) = 1 - 2 \cos 0 = -1 < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \text{ på } I_n, f'(x) > 0 \text{ på } J_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ avtagande på } [-\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi] \\ f \text{ växande på } [\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi] \end{cases}$$

2.8:20

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

a) Visa $f'(0) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + 2h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + 2h \sin \frac{1}{h} \right) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

ty $\lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$ genom instängningssatsen:

$$\underbrace{-|h|}_{\rightarrow 0} \leq h \sin \frac{1}{h} \leq \underbrace{|h|}_{\rightarrow 0}$$

b) Visa att om 0 ligger i intervall I så finns $x \in I$ så att $f'(x) < 0$ ($\Rightarrow f$ är ej växande på I).

$$\begin{aligned} x \neq 0: f'(x) &= 1 + 4x \sin \frac{1}{x} + 2x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Om $\cos \frac{1}{x} = 1$ så är $\sin \frac{1}{x} = 0$ och

$$f'(x) = 1 + 4x \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1 < 0$$

$$\cos \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{n \cdot 2\pi}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Om $|n_0|$ är tillräckligt stort så ligger $\frac{1}{n_0 \cdot 2\pi}$ i I .

Eftersom f är kontinuerlig så är $f'(x) < 0$ på en intervall $I_0 \subset I$ kring $\frac{1}{n_0 \cdot 2\pi}$.

Alltså kan inte f vara växande på I oavsett val av I .

