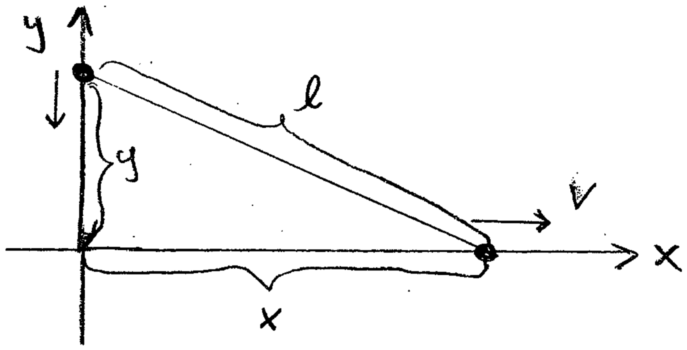
RÄKNEÖVNING 4

4.1:18 5 m hög stege lutar mot en vägg. Stegens fot rör sig $\frac{1}{3}$ m/s bort från väggen. Hur snabbt rör sig stegens topp nedför väggen när den är 3 m ovan mark?



Lösning: $v = \frac{1}{3}$ m/s

$l = 5$ m

x, y enligt figur

Pythagoras: $x^2 + y^2 = l^2$ $\quad (l^2 = 5^2 = 25)$

Derivera implicit: $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad (*)$

Vi vet att $\frac{dx}{dt} = v = \frac{1}{3}$ m/s och att vid det aktuella tillfället $y = 3$ m

Vi får $x^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow x = (\pm)\sqrt{25-9} = 4$

Då blir $(*)$

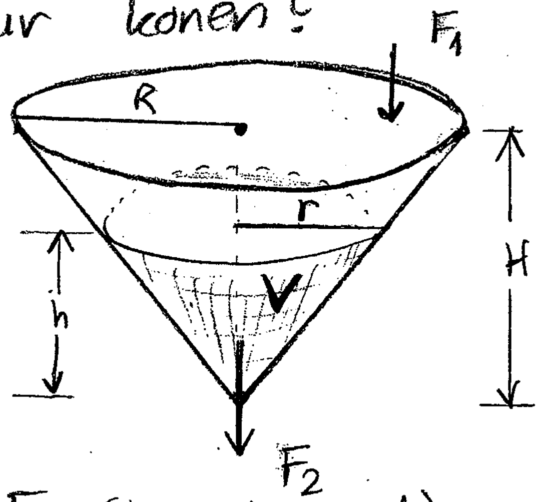
$$2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-8/3}{6} = -\frac{4}{9} \text{ m/s}$$

Stegens topp glider nedåt med farten $\frac{4}{9}$ m/s.

(D.v.s. 1.6 km/h.)

4.1:28 Vatten hälls ned i upp-och-nedvänd kon med höjd 9 m och toppdiameter 6 m med hastighet 10 m^3/h. Vattenytan stiger 20 cm/h vid djupet 6 m. Hur snabbt läcker vattnet ur konen?



Lösning: $H = 9m$

$R = \frac{6}{2} m = 3m$

$F_1 = 10 \, m^3/h$

Vi vet $\frac{dh}{dt} = 20 \, cm/h$

då $h = 6$ m. Söker F_2 (d.v.s. läckaget)

Likformighet: $\frac{r}{h} = \frac{R}{H} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$\Longrightarrow r = \frac{1}{3}h$$

Vattenets volym: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h =$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h = \frac{\pi}{27}h^3$$

Derivera: $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$

Vi vet $\frac{dh}{dt} = 20 \, cm/h = \frac{1}{5} \, m/h$ då $h = 6$ m

$$\Longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9}6^2\frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5} \, m^3/h$$

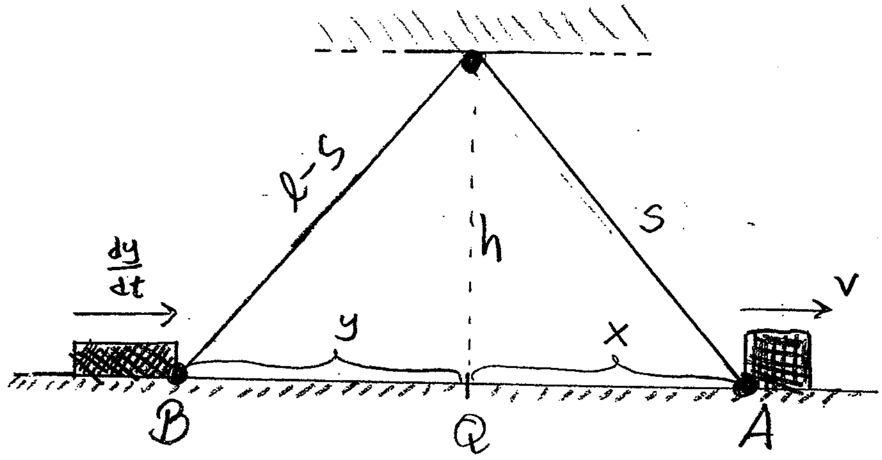
Men $\frac{dV}{dt} = F_1 - F_2 \Leftrightarrow F_2 = F_1 - \frac{dV}{dt} = 10 - \frac{4\pi}{5} \approx$

$$\approx 7.49 \, m^3/h$$

d.v.s. konen läcker 7.49 m^3 vatten per timme.

4.1:38 Två lådor A och B står på ett golv och sammanbundna med 15 m rep som går genom en trissa 4 m ovan punkt Q i golvet. Om AQ är 3 m och A dras $\frac{1}{2}$ m/s bort från Q, hur snabbt rör sig B mot Q?

Lösning:



$$\ell = 15 \text{ m} \quad (\text{replängden})$$
$$h = 4 \text{ m}$$
$$v = \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

Den högra triangeln: $s^2 = x^2 + h^2$

$$s^2 = x^2 + 16 \quad (1)$$

Den vänstra triangeln: $(\ell - s)^2 = y^2 + h^2$

$$(15-s)^2 = y^2 + 16 \quad (2)$$

Derivera (1) & (2) implicit:

$$(1) \Rightarrow 2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} \quad (*)$$

$$(2) \Rightarrow -2(15-s)\frac{ds}{dt} = 2y\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow -(15-s)\frac{ds}{dt} = y\frac{dy}{dt} \quad (**) \quad 3$$

Om $x = 3$ m så ger (1)

$$s^2 = 3^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow s = (\pm)\sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

Då ger (2): $(15-5)^2 = y^2 + 16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 100 = y^2 + 16 \Leftrightarrow y = (\pm)\sqrt{84} = \sqrt{84} \text{ m}$$

Vi vet att $\frac{dx}{dt} = v = \frac{1}{2}$ m/s så (*) ger

$$5\frac{ds}{dt} = 3 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{3}{10} \text{ m/s}$$

Insatt i (**) så fås

$$-(15-5) \cdot \frac{3}{10} = \sqrt{84}\,\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{84}} = \frac{dy}{dt} \Leftrightarrow$$

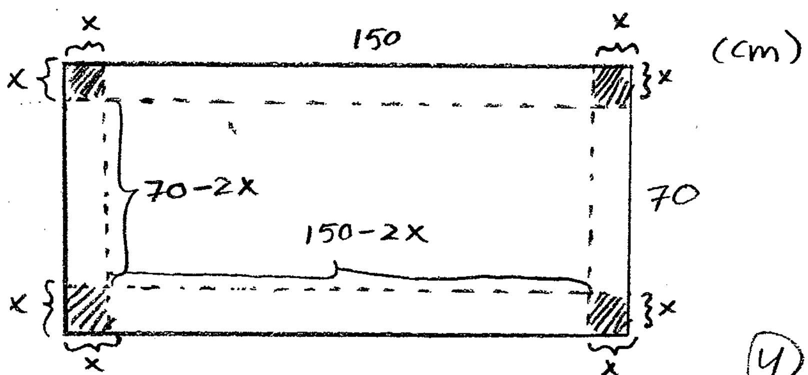
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{\sqrt{84}} \approx -0.33 \text{ m/s}$$ (− ty minskande avstånd)

d.v.s. låda B rör sig 0.33 m/s mot Q
(c:a 1.18 km/h)

4.8:18 Bygga låda utan överdel ur ett rektangulärt papperark på 70 cm × 150 cm genom att klippa bort lika stora kvadratiska hörn. Bestäm största möjliga volym.

Lösning:

x är sidlängden hos avklippta hörnen.



4

Volymen som funktion av x blir då

$$V(x) = (150-2x)(70-2x)x \quad cm^3$$

Definitionsmängd: $D_V = [0, 35]$ ty ingen sida får ha negativ längd.

V:s maximum finns i ändpunkter eller i stationär punkt eftersom singulär punkter saknas.

$$\begin{cases} V(0) = 150 \cdot 70 \cdot 0 = 0 \\ V(35) = 80 \cdot 0 \cdot 35 = 0 \end{cases} \quad \text{(ändpunkter)}$$

Stationära punkter:

$$V'(x) = (-2)(70-2x)x + (150-2x)(-2)x + (150-2x)(70-2x) \cdot 1 =$$

$$= -2(70x-2x^2) - 2(150x-2x^2) + 10500 - 440x + 4x^2 =$$

$$= -140x + 4x^2 - 300x + 4x^2 + 10500 - 440x + 4x^2 =$$

$$= 12x^2 - 880x + 10500$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{220}{3}x + 875 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{110}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{110}{3}\right)^2 - 875} = \left[875 = \frac{7875}{9}\right] =$$

$$= \frac{110}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{12100 - 7875} =$$

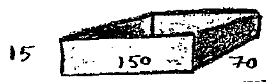
$$= \frac{110}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{4225} = \frac{110}{3} \pm \frac{1}{3}65 = \begin{cases} 175/3 \\ 15 \end{cases}$$

d.v.s. stationär punkt $x = 15$ ty $\frac{175}{3} \notin [0, 35]$.

Värdet i stationära punkten:

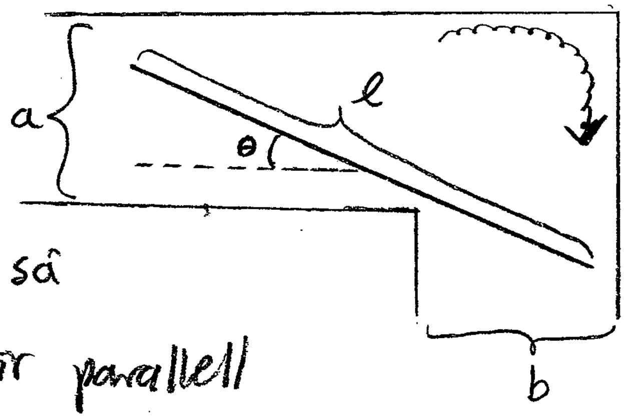
$$V(15) = (150-30)(70-30) \cdot 15 =$$
$$= 120 \cdot 40 \cdot 15 = 72000 \text{ cm}^3$$

Lådan har maximalt volymen $72\,000 \text{ cm}^3$ (d.v.s. 72 liter).



4.8:28 Bestäm längden på den längsta stång som kan bäras runt ett hörn från en korridor med bredd a m till en annan med bredd b m. (Antag stång utan bredd.)

Lösning: Situation:

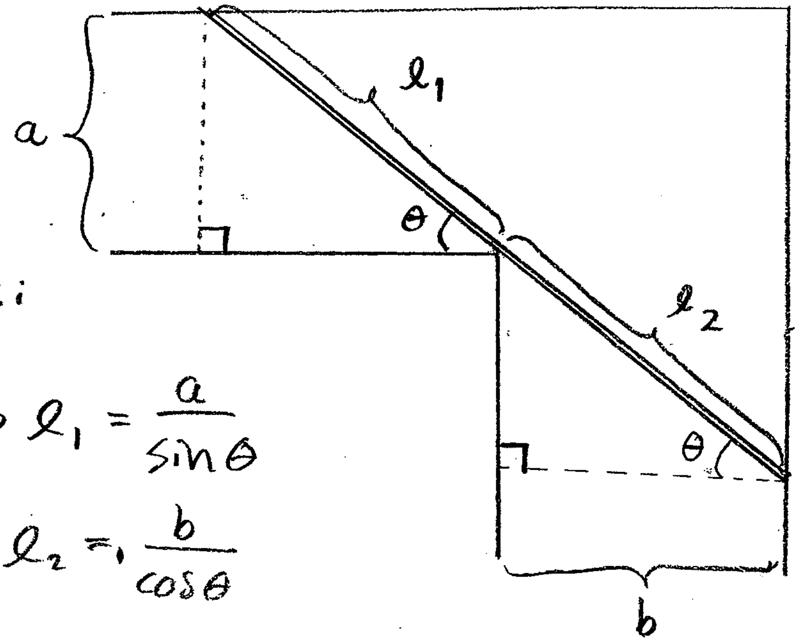


Vi tolkar uppgiften så att stången först är parallell med första korridoren, vrids 90°, och sedan parallell med andra korridoren.

Vi låter θ beteckna vinkeln mot första korridorens "riktning".

För varje θ kan man maximalt ha en stånglängd $\ell(\theta)$ enligt figuren:

$\ell(\theta) = \ell_1 + \ell_2$



Ur geometrin fås:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\ell_1} = \sin\theta \Leftrightarrow \ell_1 = \dfrac{a}{\sin\theta} \\ \dfrac{b}{\ell_2} = \cos\theta \Leftrightarrow \ell_2 = \dfrac{b}{\cos\theta} \end{cases}$$

Detta ger $\quad \ell(\theta) = \dfrac{a}{\sin\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta}$

Notera att $\theta = (0, \frac{\pi}{2})$

$\lim_{\theta \to 0+} \ell(\theta) = \infty$ ty $\sin\theta \longrightarrow 0+$ då $\theta \to 0+$

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \ell(\theta) = \infty$ ty $\cos\theta \longrightarrow 0+$ då $\theta \to \frac{\pi}{2}+$

Detta innebär att minsta stånglängden som passas in (d.v.s. största vi kan bära runt hörnet) ges av den stationära punkten:

$$\ell'(\theta) = -\frac{a}{\sin^2\theta}\cos\theta - \frac{b}{\cos^2\theta}(-\sin\theta) =$$

$$= -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = [\text{förläng}] =$$

$$= \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \Leftrightarrow b\sin^3\theta - a\cos^3\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan^3\theta = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \tan\theta = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/3} \quad (*)$$

Behöver ej räkna ut θ, endast $\sin\theta$ & $\cos\theta$.

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \overset{\text{Trig-ettan}}{=} \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1 \overset{(*)}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^{2/3} + 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}+1} = \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}} =$$

$$= \frac{a^{2/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}}$$

Detta ger minimumvärdet (d.v.s. maximal längd som kan bäras runt hörnet)

$$\ell(\theta) = \frac{a}{\sin\theta} + \frac{b}{\cos\theta} = a\frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}} + b\frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}} =$$

$$= (a^{2/3}+b^{2/3})\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} =$$

$$= (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \quad m$$

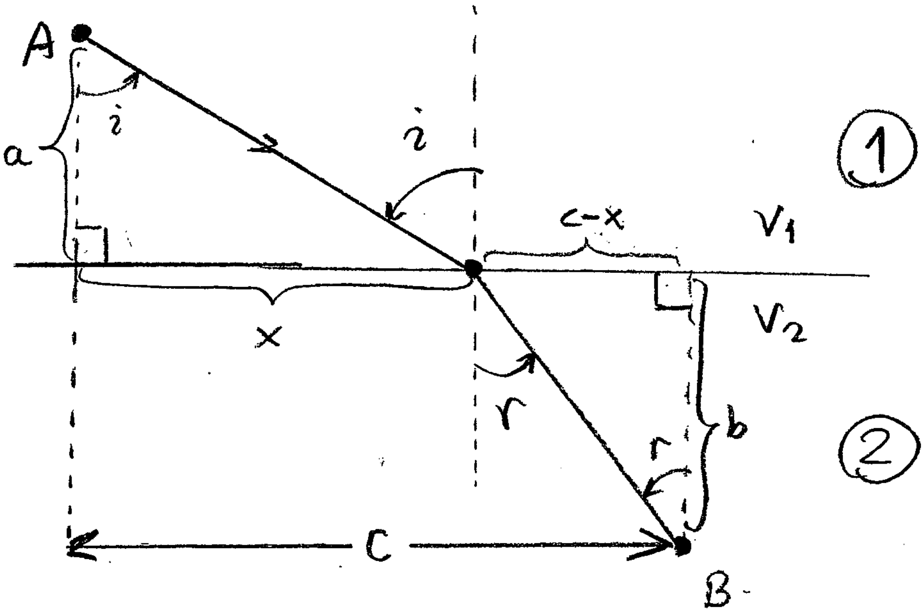
Den längsta stång man kan bära runt hörnet är alltså $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ m lång.

<u>4.8:40</u> Ljusfart v_1 resp. v_2 i två olika medier åtskilda av plan yta. Visa att om ljuset går från A till B i de olika medierna så bryts det enligt Snells lag, d.v.s. $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$, där i = infallsvinkeln, r = refraktionsvinkeln. Använt principen att ljuset tar den väg som tar kortast tid.

Lösning:

Inför avstånd enligt figur.

X varierar mellan $-\infty$ och ∞, vi söker x som ger kortast tid.



Totala tiden är:

$$T(x) = \frac{\text{sträcka i } 1}{v_1} + \frac{\text{sträcka i } 2}{v_2} = [\text{Pythagoras}] =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} T(x) = \lim_{x\to\infty} T(x) = \infty$$

$\Rightarrow$ Minimum finns i stationär punkt ty inga singulära punkter finns

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Notera att $\sin i = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin r = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$

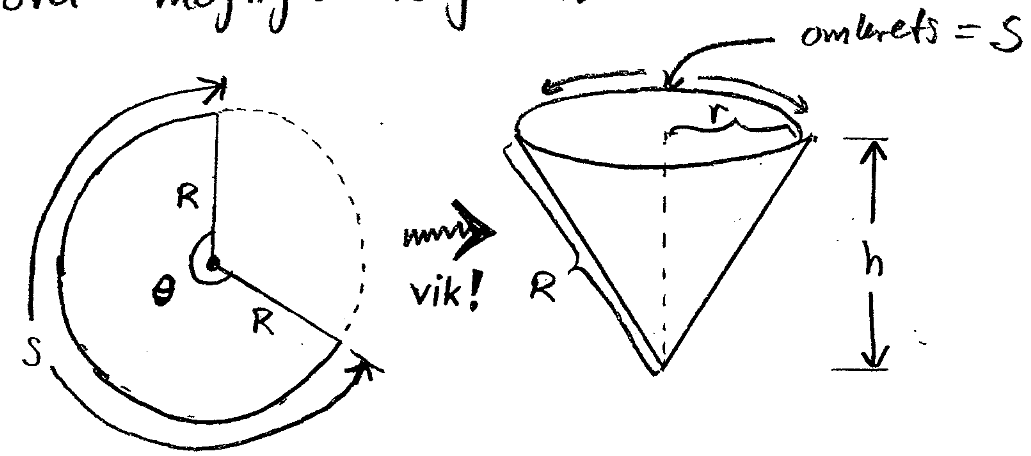
(se vinklar i & r vid A resp. B)

$\Rightarrow$ Minimum för $\frac{1}{v_1}\sin i = \frac{1}{v_2}\sin r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$ (Snells lag)

4.8:48 Sektor skärs ut ur cirkelskiva radie R. Resten böjs till en kon. Bestäm största möjliga volymen.

Lösning:



R är cirkelskivans radie. Vi skär ut en sektor så att vinkel θ kvar. Då fås S enligt:

$$S = 2\pi R \frac{\theta}{2\pi} = R\theta$$

Detta måste vara omkretsen på toppen till konen, d.v.s.

$$S = 2\pi r$$
$$R\theta = 2\pi r$$
$$r = \frac{R}{2\pi}\theta$$

Pythagoras: $R^2 = h^2 + r^2$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2} =$$
$$= \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

Konens volym: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h =$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2 \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} =$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

Låt $C = \frac{R^3}{24\pi^2}$. Då är volymen

$$V(\theta) = C\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Maximum fås i ändpunkter till $[0, 2\pi]$ eller i stationär punkt i $(0, 2\pi)$.

$$V(0) = V(2\pi) = 0$$

Stationär punkt:

$$V'(\theta) = C \cdot 2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2} + C\theta^2 \frac{-\theta}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} =$$

$$= C\frac{2\theta(4\pi^2-\theta^2)-\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} =$$

$$= C\frac{8\pi^2\theta - 3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}} = C\frac{\theta(8\pi^2-3\theta^2)}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}$$

$$V'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ eller } 8\pi^2 = 3\theta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ eller } \theta = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$$

Men varken 0 eller $-\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ ligger i $(0, 2\pi)$

$\Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$ är stationära punkten

$\Rightarrow$ Maximal volym:

$$V\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\pi\right) = C \cdot \frac{8}{3}\pi^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} =$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\frac{8}{3}\pi^2\sqrt{\frac{12\pi^2-8\pi^2}{3}} =$$

$$= \frac{R^3}{9}\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$