RÄKNEÖVNING 5

5.2:6 Beräkna arean under $y=x^2+1$, över $y=0$, och från $x=0$ till $x=a$ $(a>0)$.

Lösning: Dela in $[0,a]$ i n delintervall.

Intervallängd: $\frac{a-0}{n}=\frac{a}{n}$

$$\Longrightarrow x_0=0,\ x_1=\frac{a}{n},\ x_2=\frac{2a}{n},\dots,\ x_n=\frac{na}{n}=a$$

d.v.s. $x_i=\frac{ia}{n}$, $i=0,1,2,\dots,n$.

Detta ger summan

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+1)(x_i-x_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{ia}{n}\right)^2+1\right]\frac{a}{n}=$$

$$=\left(\frac{a}{n}\right)^3\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}1=$$

$$=\left[\text{Formel } \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=$$

$$=\left(\frac{a}{n}\right)^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{a}{n}n=$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}a^3+a$$

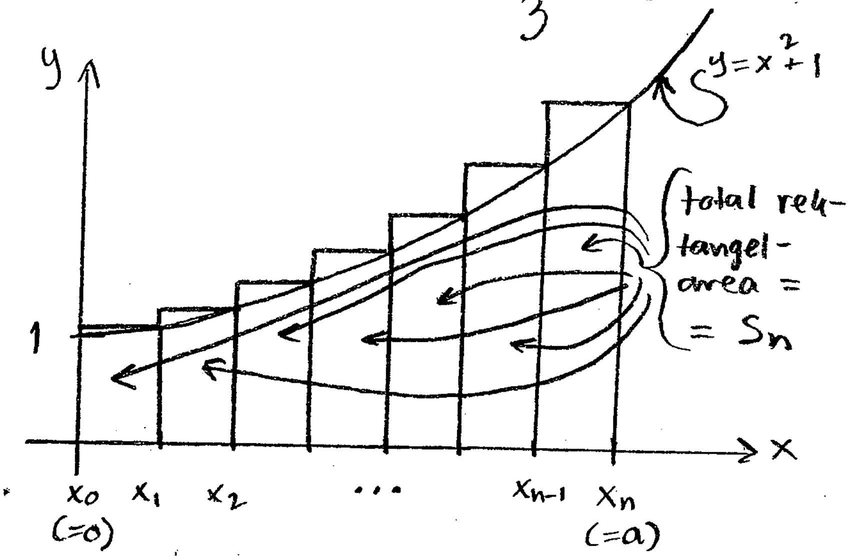
Detta ger arean

$$A=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}a^3+a\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)a^3+a\right)=$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(1+0)\cdot(2+0)\cdot a^3 + a = \frac{a^3}{3} + a$$

Illustration steg n:



5.2:18 Tolka $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+3i}{n^2}$ och beräkna $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Lösning: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+3i}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

för något f och något intervall $[a,b]$.

Vet att om intervall har samma längd så måste $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+3i}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

Mult. m. n: $\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{3i}{n}\right) = (b-a)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

Det finns flera tolkningsmöjligheter. Enklast är att välja $a=0$, $b=1 \Rightarrow [a,b]=[0,1]$ och

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{3i}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Vi vet att $x_0 = a = 0$, $x_n = b = 1$, så

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (2 + 3x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

d.v.s. $f(x_i) = 2 + 3x_i$

Vi väljer $f(x) = 2 + 3x$, $x \in [0, 1]$.

S_n tolkas då som samman av n lika breda rektanglar som approximerar arean A under $y = 2+3x$, över $y=0$, och mellan $x=0$ och $x=1$.

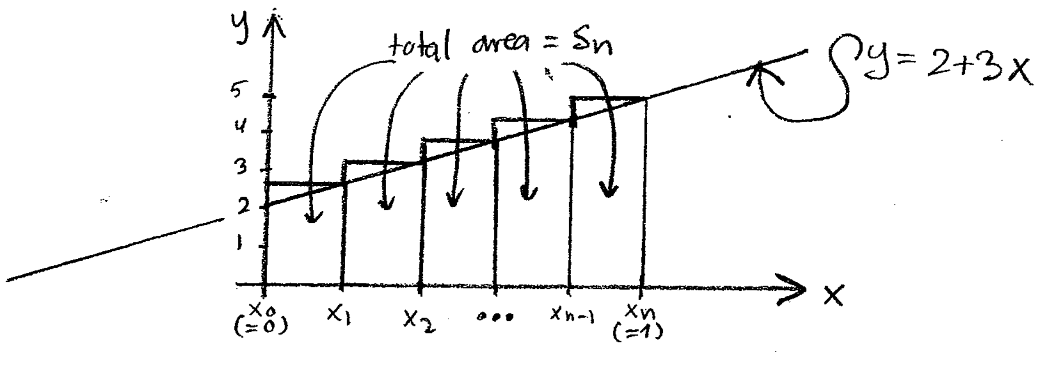
$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+3i}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{3}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right) =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} \cdot n + \frac{3}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = 2 + \frac{3}{2}(1+0) = \frac{7}{2}$$



5.3:6 $f(x) = \cos x$ på $[0, 2\pi]$. Bestäm $L(f, P_n)$ & $U(f, P_n)$ om partition i fyra delintervall av samma längd.

Lösning: Partition $P_4 = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$
$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

Undersumman använder minsta värdet på varje intervall:

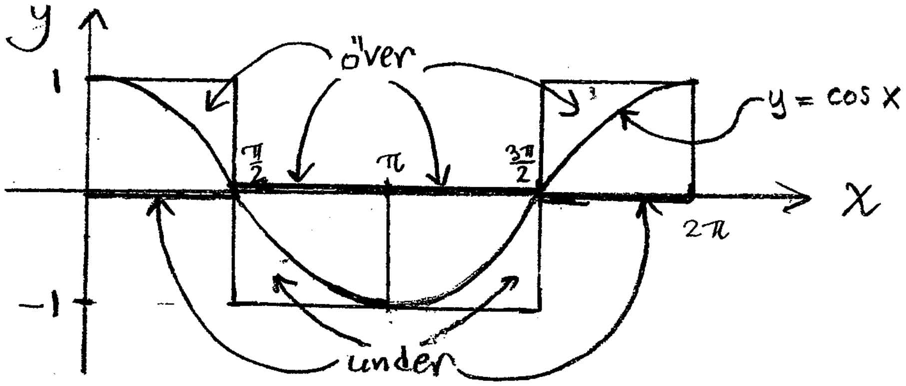
$$L(f, P_4) = \sum_{i=1}^{4} f(l_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{4} \cos l_i \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\begin{matrix}\text{minst på}\\ [0, \frac{\pi}{2}]\end{matrix} + \begin{matrix}\text{minst på}\\ [\frac{\pi}{2}, \pi]\end{matrix} + \begin{matrix}\text{minst på}\\ [\pi, \frac{3\pi}{2}]\end{matrix} + \begin{matrix}\text{minst på}\\ [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(0 + (-1) + (-1) + 0\right) = -\pi$$

Översumman tar istället största värdet:

$$U(f, P_4) = \frac{\pi}{2}\left(1 + 0 + 0 + 1\right) = \pi$$



5.3:12 Uttryck gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$ som en bestämd integral.

Lösning: Vi vill tolka $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$ som en Riemannsumma $R(f, P_n, c)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

d.v.s. $R(f, P_n, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$

Här gäller $P_n = \{x_0, \dots, x_n\}$, $c_1 \in [x_0, x_1], \dots, c_n \in [x_{n-1}, x_n]$

Antag lika långa intervall över $[a,b]$. Då fås

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ och därmed

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$$

mult. m. n: $(b-a)\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}$ $(*)$

Här har vi $c_i \in [x_{i-1}, x_i] = \left[(b-a)\frac{i-1}{n}+a, (b-a)\frac{i}{n}+a\right]$

ty $x_i = (b-a)\frac{i}{n}+a$ $\left(x_0 = a, x_1 = \frac{b-a}{n}+a, \dots, x_n = b\right)$

Välj $a=0, b=1$. Då blir $(*)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}, \quad (**)$$

$$c_i \in \left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right]$$

Välj $c_i = \frac{i-1}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] = [x_{i-1}, x_i]$.

$(**) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i}$

d.v.s. $f(c_i) = \sqrt{c_i}$ fungerar $(f(x) = \sqrt{x})$

Vi gör där tolkningen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

5.3:16 Uttryck $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$ som en bestämd integral.

Lösning: $\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$ ska tolkas som en Riemannsum $R(f, P_n, c)$. Vi ser att

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2(1+(i/n)^2)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(i/n)^2} \cdot \frac{1}{n} \quad (*)$$

Vi misstänker intervallet $[0,1]$. Med lika långa intervall: $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Intervallen ges av

$$[x_{i-1}, x_i] = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$$

Välj $c_i = \frac{i}{n} \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] = [x_{i-1}, x_i]$

Då kan $(*)$ tolkas som Riemannsumman

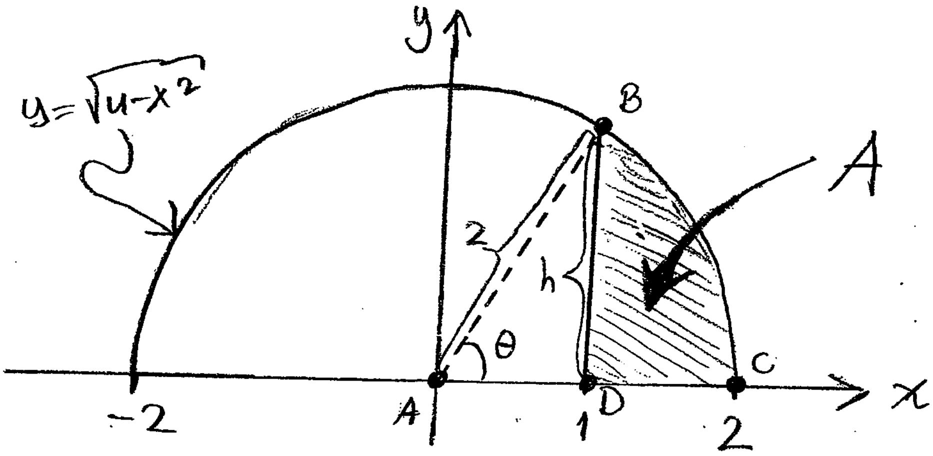
$$R(f, P_n, c) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+c_i^2} \Delta x_i$$

d.v.s. $f(c_i) = \frac{1}{1+c_i^2}$, så att $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$, funkar. I gränsen $n \to \infty$ fås därför den bestämda integralen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

5.4:16 Beräkna $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ och tolka som area.

Lösning: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. För $y=f(x)$ har vi alltså $y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 2^2$, d.v.s. f:s graf är en halvcirkel med radien 2 som ligger i det övre xy-planet.



Vi söker area $A = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$, streckat område i figuren.

Vi ser att

A = area cirkelsektor ABC − area triangel ABD

Triangelns höjd h ges av Pythagoras:

$$1^2 + h^2 = 2^2 \Leftrightarrow h^2 = 3 \Leftrightarrow h = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Triangelns area $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}/2$

Cirkelsektorns vinkel θ ges av

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow [\theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]] \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

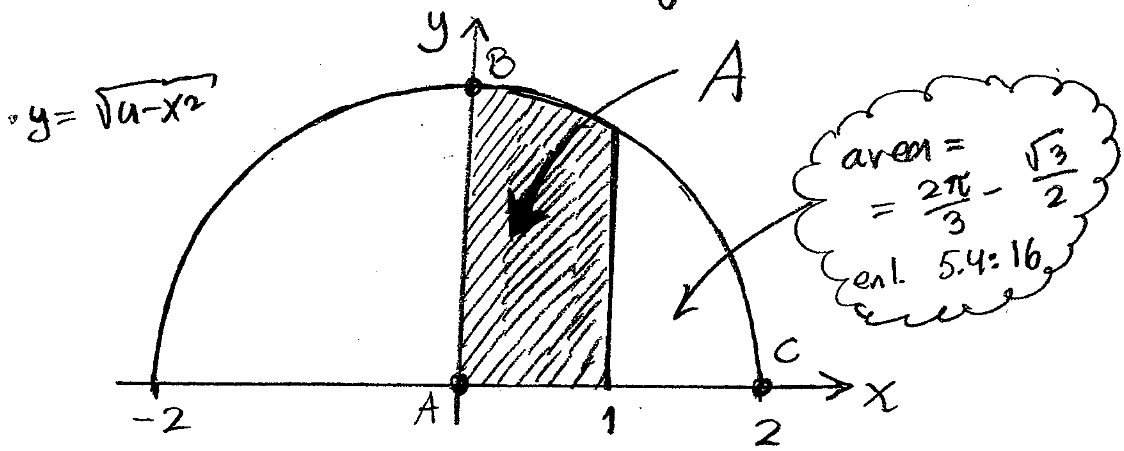
Detta ger

$$\text{Cirkelsektorarea} = \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = 4\pi \cdot \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow A = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\approx 1.23)$$

5.4:15 Beräkna $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ och tolka som area.

Lösning: Vi har samma funktion men annat integrationsområde jmf. m. 5.4:16 :



Vi söker $A = \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ = [integrationsregel]

$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

5.4:16

$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2} - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ är arean av kvartscirkelskivan ABC i figuren med area $\frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi$

Alltså måste gälla att arean i figuren är

$$A = \pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\approx 1.91)$$

5.4:30 Bestäm medelvärdet av funktionen $k(x) = x^2$ över $[0,3]$.

Lösning: Medelvärdet $\overline{k}$ ges av

$$\overline{k} = \frac{1}{3-0}\int_0^3 k(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,dx = [\underbrace{\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}}] =$$

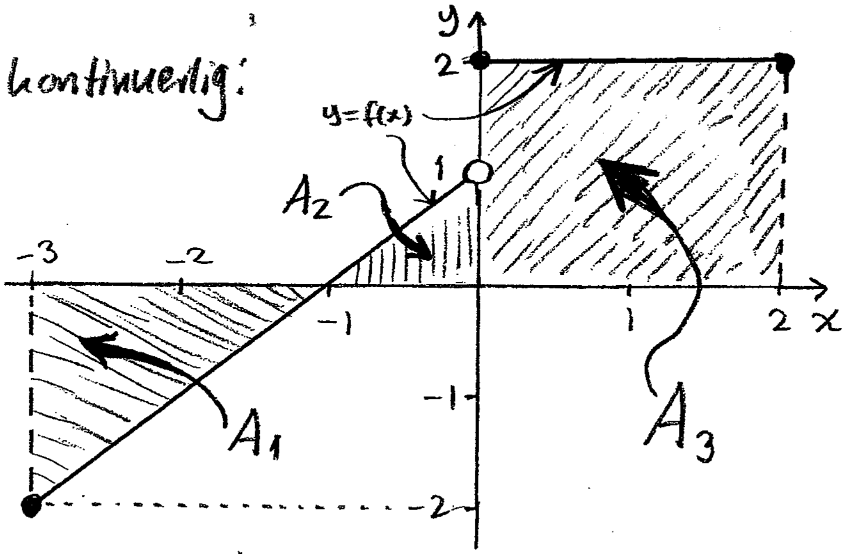
$$= \frac{1}{3}\,\frac{3^3}{3} = \frac{3^3}{3^2} = 3$$

Visas på s. 302 i upplaga 7 (s. 288 i upplaga 6)

5.4:34 Beräkna $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ för $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$

Lösning: f styckvis kontinuerlig:

Vi räknar A_1, A_2, A_3 alla som positiva



Vi ser att $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ är följande:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = -A_1 + A_2 + A_3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2 =$$

$$= -2 + \frac{1}{2} + 4 = \frac{5}{2}$$