RÄKNEÖVNING 7

6.5:34 Konvergerar eller divergerar $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$?

Lösning: Vi har att $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$ är obegränsad nära $x=0$. Vi delar upp intervallet i delintervallen $(0,1]$, $[1,\infty)$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}}_{=I_2}$$

I_1: På $(0,1]$ gäller att

$$\sqrt{x}+x^2 > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

Så att $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} < \int_0^1 x^{-1/2}dx = \frac{1^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = 2$

I_2: På $[1,\infty)$ gäller att

$$\sqrt{x}+x^2 > x^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} < \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Så att $I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} < \int_1^\infty x^{-2}dx = \frac{1^{1-2}}{2-1} = 1$

Då gäller

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} = I_1 + I_2 < 2+1 = 3 < \infty$$

Så att integralen konvergerar.

7.1:22 Område R definierat mellan $y=x^{-k}$, $y=0$ och till höger om $x=1$ roteras kring x-axeln. Bestäm k så att rotationsvolymen blir ändlig.

Lösning: Vi har $f(x) = x^{-k}$. Volymen blir därför:

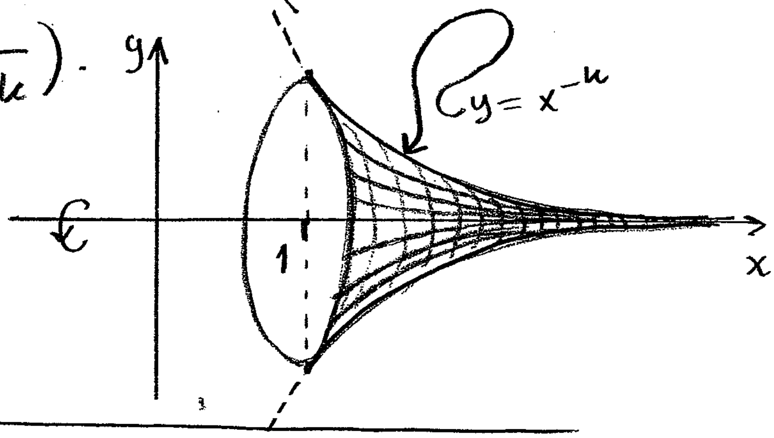
$$V = \pi \int_1^\infty (f(x))^2 dx = \pi \int_1^\infty (x^{-k})^2 dx = \pi \int_1^\infty x^{-2k} dx =$$

$$= \pi \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-2k} dx = \begin{cases} \pi \lim\limits_{R\to\infty} (\ln|x|)\Big|_1^R, & 2k = 1 \\ \pi \lim\limits_{R\to\infty} \left(\frac{1}{1-2k} x^{1-2k}\right)\Big|_1^R, & 2k \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi \lim\limits_{R\to\infty} \ln R, & k = 1/2 \\ \frac{\pi}{1-2k} \lim\limits_{R\to\infty} (R^{1-2k} - 1), & k \neq 1/2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & k = 1/2 \\ \begin{cases} \infty, & k < 1/2 \quad (1-2k > 0) \\ \frac{\pi}{1-2k}, & k > 1/2 \quad (1-2k < 0) \end{cases} \end{cases}$$

Ändlig volym fås för $k > 1/2$ (och då är volymen $\frac{\pi}{1-2k}$).



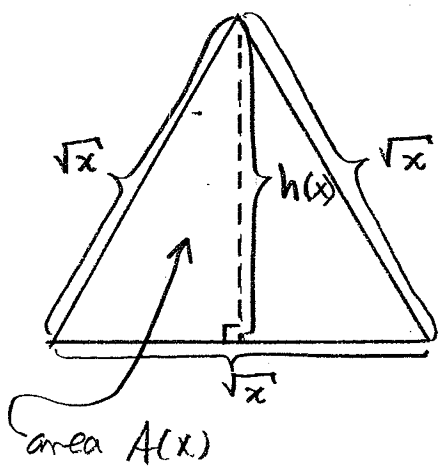
7.2:6 En kropp ligger utefter x-axeln från $x = 1$ till $x = 4$. Dess tvärsnittsyta i x är en liksidig triangel med sidlängd $\sqrt{x}$. Bestäm kroppens volym.

Lösning: Triangelhöjden $h(x)$ ges av Pythagoras:

$$(\sqrt{x})^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2 + (h(x))^2$$

$$x = \tfrac{1}{4}x + (h(x))^2$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x}$$



Tvärsnittsarean i x blir då:

$$A(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\, h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}}{4} x$$

Detta ger volymen

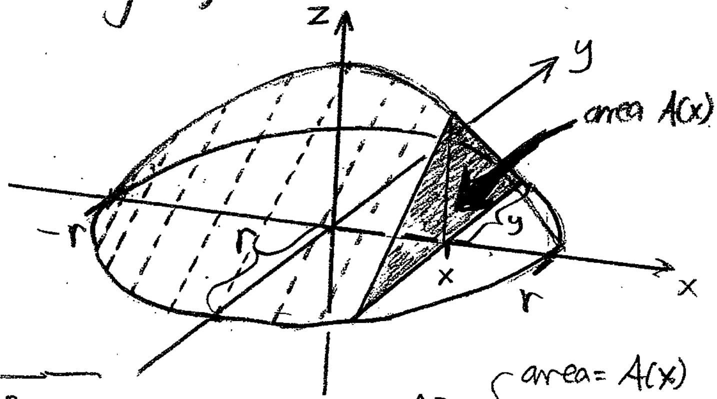
$$V = \int_1^4 A(x)\,dx = \int_1^4 \frac{\sqrt{3}}{4} x\,dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^4 x\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^4 = \frac{\sqrt{3}}{8}(4^2-1^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(16-1) = \frac{15\sqrt{3}}{8}$$

7.2:12 En kropp har en cirkelformad bas med radien r. Sektionerna vinkelräta mot en specifik diameter hos basen är liksidiga trianglar. Bestäm kroppens volym.

Lösning: Kroppen har följande utseende (med lämpliga koordinataxlar inlagda):

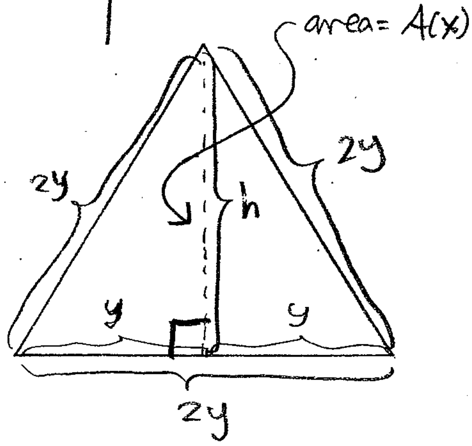


Cirkelns ekvation:

$$x^2+y^2=r^2$$

Vid x så blir triangelns baslängd därför

$$2y = 2\sqrt{r^2-x^2} \Leftrightarrow y = \sqrt{r^2-x^2}$$



Höjden på triangeln:

$$(2y)^2 = y^2+h^2$$

$$h^2 = 3y^2$$

d.v.s. $h = \sqrt{3}\,y = \sqrt{3}\sqrt{r^2-x^2}$

Detta ger triangel-/tvärsnittsarean

$$A(x) = \frac{1}{2}\cdot 2y\cdot h = yh = \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{r^2-x^2} =$$

$$= \sqrt{3}\,(r^2 - x^2)$$

Då fås volymen

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{3}\,(r^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \sqrt{3} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \sqrt{3}\left(r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-r}^{r} =$$

$$= \sqrt{3}\left[\left(r^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}r^3\right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \tfrac{1}{3}(-r)^3\right)\right] =$$

$$= \sqrt{3}\left(r^3 - \tfrac{1}{3}r^3 + r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\right) =$$

$$= \sqrt{3}\left(2r^3 - \tfrac{2}{3}r^3\right) = \sqrt{3}\left(2 - \tfrac{2}{3}\right)r^3 =$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{4}{3}\,r^3 = \frac{4}{\sqrt{3}}\,r^3$$

7.3:20 Beräkna arean hos rotationsytan som bildas när man roterar $y = x^2$, $x \in [0, 2]$, kring y-axeln.

Lösning: Vi har $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 2$. Formeln

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

för rotationsytans area vid rotation kring x-axeln ger då i vårt fall (med $f'(x) = 2x$)

$$S = 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx =$$

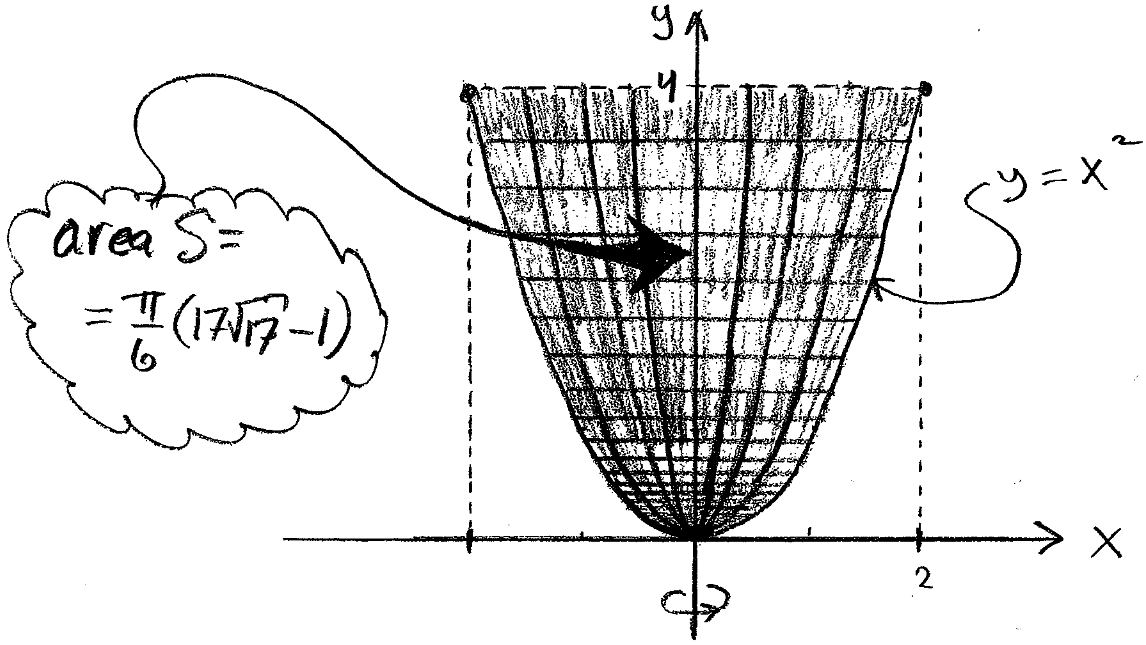
$$= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + 4x^2}\,dx =$$

$$= \left[\begin{cases} u = 1 + 4x^2 \\ du = 8x\,dx \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \Rightarrow u = 17 \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}\right] =$$

$$= 2\pi \int_1^{17} \sqrt{u}\,\frac{1}{8}\,du = \frac{\pi}{4} \int_1^{17} u^{1/2}\,du =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^{17} = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1^{3/2}\right) =$$

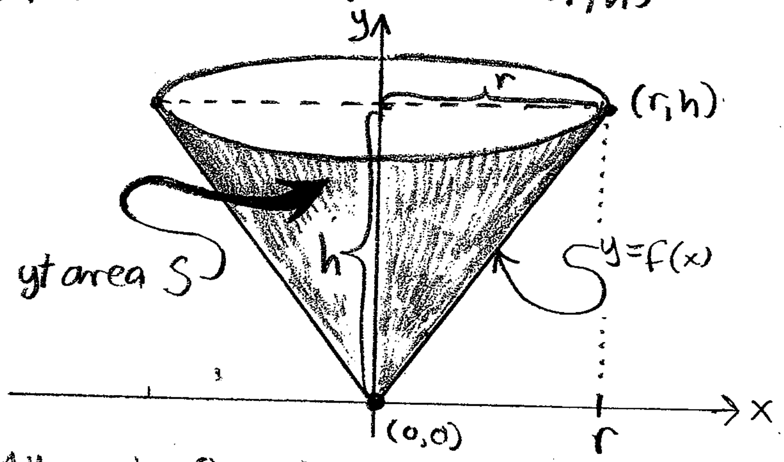
$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$$



7.3:28 Bestäm arean hos den krökta ytan av en kon med basradie r och höjd h genom att rotera linjesegmentet mellan $(0,0)$ och (r,h) kring y-axeln.

Lösning:

Linjesegmentet $y=f(x)$ mellan $(0,0)$ och (r,h) har lutningen $f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h-0}{r-0} = \frac{h}{r}$



Detta ger rotationsytarean

$$S = 2\pi \int_0^r |x| \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx =$$
$$= 2\pi \int_0^r x \sqrt{1+(h/r)^2}\, dx =$$
$$= 2\pi \sqrt{1+(h/r)^2} \int_0^r x\, dx = 2\pi\sqrt{1+(h/r)^2}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^r =$$
$$= \pi \sqrt{1+(h/r)^2}\, r^2 = \pi r \sqrt{r^2\left(1+\left(\tfrac{h}{r}\right)^2\right)} =$$
$$= \pi r \sqrt{r^2+h^2}$$