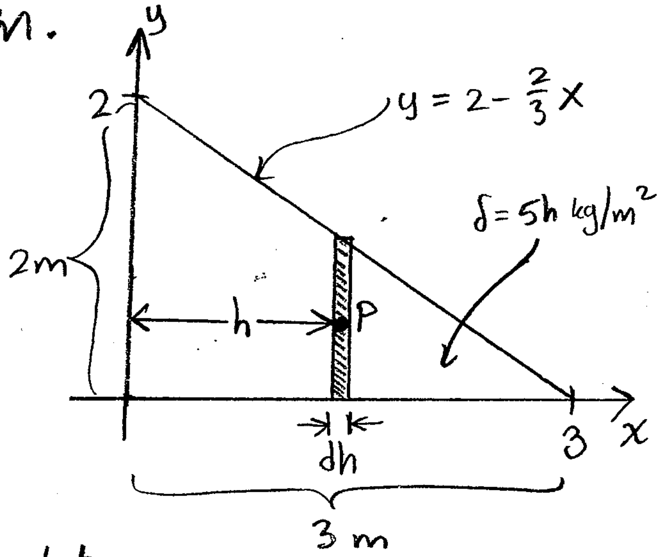
RÄKNEÖVNING 8

7.4:6 Bestäm massa och masscentrum för en rätvinklig triangelformad platta med kateterna 2 m och 3 m om areamasstätheten i P är 5h kg/m² om h är avståndet mellan P och den kortare kateten.



Lösning: Inför koordinatsystem enligt figuren:

Hypotenusan beskrivs med formeln $y = 2 - \frac{2}{3}x$.

Arean hos det vertikala bandet i figuren är då

$$dA = \underbrace{\left(2 - \tfrac{2}{3}h\right)}_{\text{höjd}}\underbrace{dh}_{\text{bredd}}$$

Detta ger masselementet

$$dm = \delta\, dA = 5h\left(2 - \tfrac{2}{3}h\right)dh$$

Plattans massa:

$$m = \int_{h=0}^{h=3} dm = \int_0^3 5h\left(2 - \tfrac{2}{3}h\right)dh =$$

$$= 10\int_0^3 \left(h - \tfrac{1}{3}h^2\right)dh = 10\left(\tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{9}h^3\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 10\left(\tfrac{1}{2}9 - \tfrac{1}{9}27\right) = 45 - 30 = \underline{\underline{15 \text{ kg}}}$$

Moment kring $x=0$:

$$M_{x=0} = \int_{h=0}^{h=3} h\, dm = \int_0^3 h \cdot 5h\left(2 - \tfrac{2}{3}h\right)dh =$$

$$= 10\int_0^3 \left(h^2 - \frac{1}{3}h^3\right)dx = 10\left(\frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{12}h^4\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 10\left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{1}{12}81\right) = 90 - \frac{10}{4}\cdot\frac{81}{3} =$$

$$= 90 - \frac{5}{2}\cdot 27 = 90 - \frac{135}{2} = \frac{180-135}{2} = \frac{45}{2} \text{ kg}\cdot\text{m}$$

Moment kring $y=0$ (bandet har masscentrum i $(h, \frac{y}{2})$):

$$M_{y=0} = \int_{h=0}^{h=3} \frac{y}{2}\,dm = \int_0^3 \frac{2-\frac{2}{3}h}{2}\cdot 5h\left(2-\frac{2}{3}h\right)dh =$$

$$= 10\int_0^3 h\left(1-\frac{1}{3}h\right)^2 dh = 10\int_0^3 h\left(1-\frac{2}{3}h+\frac{1}{9}h^2\right)dh =$$

$$= 10\int_0^3 \left(h - \frac{2}{3}h^2 + \frac{1}{9}h^3\right)dh =$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}h^2 - \frac{2}{9}h^3 + \frac{1}{36}h^4\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 10\left(\frac{1}{2}\cdot 9 - \frac{2}{9}\cdot 27 + \frac{1}{36}\cdot 81\right) =$$

$$= 45 - 60 + \frac{45}{2} = \frac{90-120+45}{2} = \frac{15}{2} \text{ kg}\cdot\text{m}$$

Masscentrum ges då av

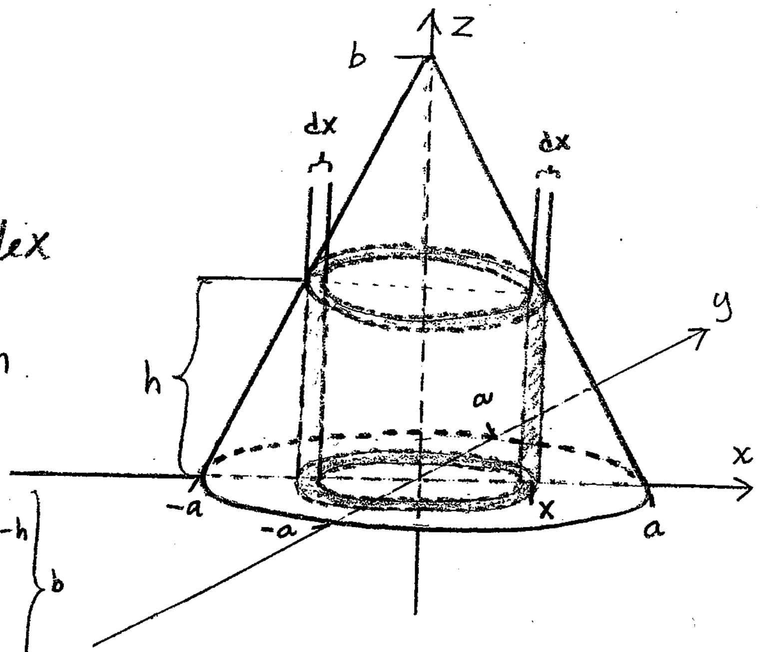
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{m}, \frac{M_{y=0}}{m}\right) = \left(\frac{45/2}{15}, \frac{15/2}{15}\right) =$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ m}}}$$

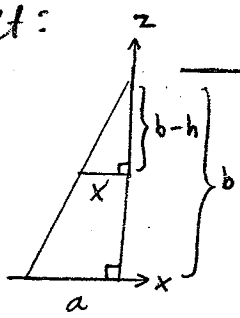
7.4:14 Bestäm massa och masscentrum för en kon med basradie a cm, höjd b cm och masstäthet kx g/cm^3 i P om P ligger på avståndet x från konens symmetriaxel.

Lösning: Låt konens bas ligga i xy-planet och låt spetsen ligga på höjden b i z-axeln.

I cylinderskalet i figuren (tjocklek dx) är masstätheten konstant: $\delta(x)=kx$



Skalets höjd h är given genom likformighet:



$$\frac{b-h}{x} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow h = b - \frac{b}{a}x = b\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

Skalets volym: $dV = \underbrace{2\pi x}_{\text{omkrets}} \cdot \underbrace{h}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{tjocklek}} = 2\pi b x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx$

$\Longrightarrow$ skalets massa: $dm = \delta(x)dV = kx \cdot 2\pi b x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx = 2\pi bk\, x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx$

Total massa: $$m = \int_{x=0}^{x=a} dm = \int_0^a 2\pi bk\, x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx = 2\pi bk\int_0^a \left(x^2-\frac{1}{a}x^3\right)dx = 2\pi bk\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4a}x^4\right)\Big|_0^a = 2\pi bk\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^3\right) = \boxed{\frac{\pi k b a^3}{6}}$$

$\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}\right]$

Skalets moment kring $z=0$ (skalets masscentrum: $\bar{z}_{skal}=\frac{h}{2}$):

$$dM_{z=0} = \frac{h}{2}dm = \frac{1}{2}b\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot 2\pi bk\, x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)dx = \pi b^2 k x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

Totala momentet kring $z=0$ blir därför:

$$M_{z=0} = \int_{x=0}^{x=a} dM_{z=0} = \int_0^a \pi b^2 k x^2 \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx =$$

$$= \pi b^2 k \int_0^a x^2\left(1 - \frac{2}{a}x + \frac{1}{a^2}x^2\right) dx =$$

$$= \pi b^2 k \int_0^a \left(x^2 - \frac{2}{a}x^3 + \frac{1}{a^2}x^4\right) dx =$$

$$= \pi b^2 k \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2a}x^4 + \frac{1}{5a^2}x^5\right)\Big|_0^a =$$

$$= \pi b^2 k \left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{5}a^3\right) =$$

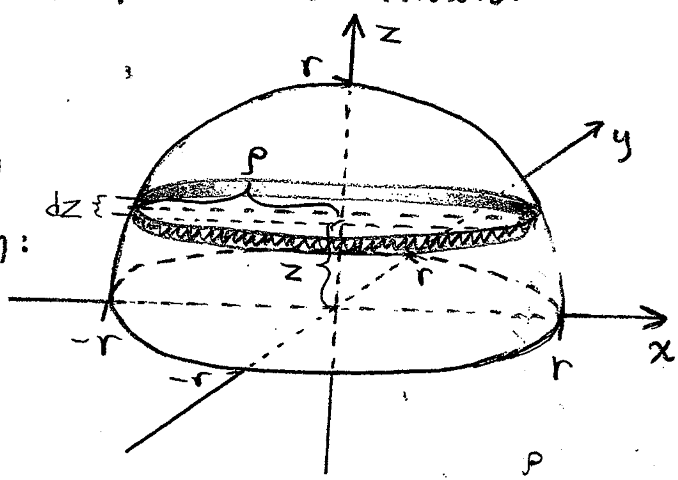
$$= \pi b^2 k \,\frac{10-15+6}{30} a^3 = \frac{\pi k b^2 a^3}{30}$$

Detta ger $\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\pi k b^2 a^3/30}{\pi k b a^3/6} = \frac{b}{5}$

P.g.a. symmetri måste $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Masscentrum ligger alltså i $\boxed{(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0,0,\frac{b}{5}\right)}$. (I vårt valda koordinatsystem.)

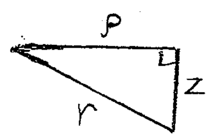
7.5:10 Bestäm centroiden till ett massivt halvklot med radien r.

Lösning: Låt klotet läggas in i följande koordinatsystem:



Om $\delta = 1$ så är massan hos ett halvklot

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{2\pi}{3}r^3$$



Cirkelskivan med höjd dz i figuren ligger på höjden z. Enligt Pythagoras måste gälla: $\rho^2 + z^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho^2 = r^2 - z^2$, där ρ är cirkelskivans radie.

Detta ger volymselementet

$$dV = \pi\rho^2 \cdot dz = \pi(r^2-z^2)dz$$

d.v.s. $dm = \pi(r^2-z^2)dz$ ty $\delta = 1$.

Momentet kring $z=0$ blir därför för skivan:

$$dM_{z=0} = z\,dm = \pi(r^2-z^2)z\,dz$$

Totala momentet kring $z=0$:

$$M_{z=0} = \int_{z=0}^{z=r} dM_{z=0} = \int_0^r \pi(r^2-z^2)z\,dz =$$

$$= \pi\int_0^r (r^2z-z^3)dz =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}r^2z^2 - \frac{1}{4}z^4\right)\Big|_0^r =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4}r^4\right) = \frac{\pi}{4}r^4$$

Vi får därför $\bar{z} = \dfrac{M_{z=0}}{m} = \dfrac{\pi r^4/4}{2\pi r^3/3} = \dfrac{3}{8}r$

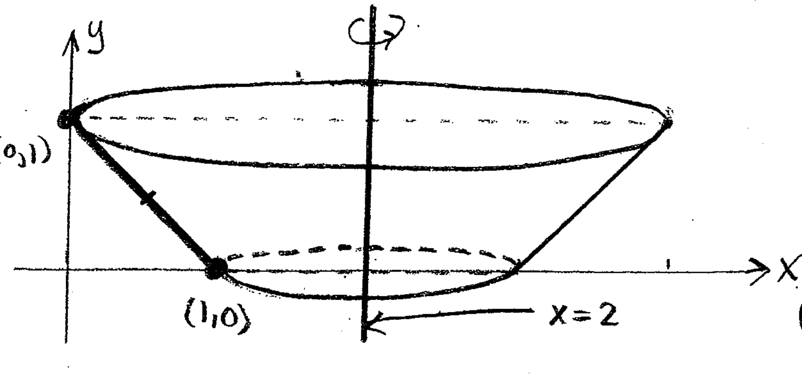
P.g.a. symmetri gäller $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Masscentrum ligger alltså i $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0,0,\frac{3}{8}r)$,

d.v.s. $\frac{3}{8}r$ från basen utefter symmetriaxeln.

7.5:22 Linjesegmentet $(1,0)$ till $(0,1)$ roteras kring $x=2$ så att en konisk yta bildas. Bestäm ytans area.

Lösning: Se figur:



5

Här är det läge att tillämpa Pappus' sats (b):

$$S = 2\pi \bar{r} s \qquad (*)$$

där S är rotationsytans area, $\bar{r}$ linjesegmentets centroids avstånd från rotationsaxeln och s längden på linjesegmentet.

I vårt fall gäller:

- Linjesegmentets centroid måste ligga mittemellan $(1,0)$ och $(0,1)$, d.v.s. i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Detta ger $\bar{r} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- Linjesegmentets längd är genom Pythagoras $s = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

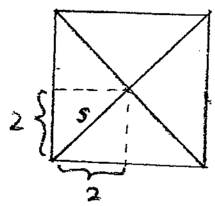
Vi får då att $(*)$ ger rotationsytarean

$$S = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} = 3\pi\sqrt{2} \quad (\approx 13.3) \quad \text{(areaenheter)}$$

7.6:4 En pyramid med $4\,m \times 4\,m$ kvadratisk bas och med fyra liksidigt triangulära ytor är placerad på botten av en sjö på $10\,m$ djup. Bestäm vattnets kraft på varje triangulär yta.

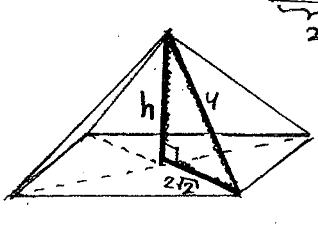
Lösning: Vi härleder först höjden h för pyramiden

Pyramiden ovanifrån:



$$s^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow s = 2\sqrt{2}$$

Detta ger:

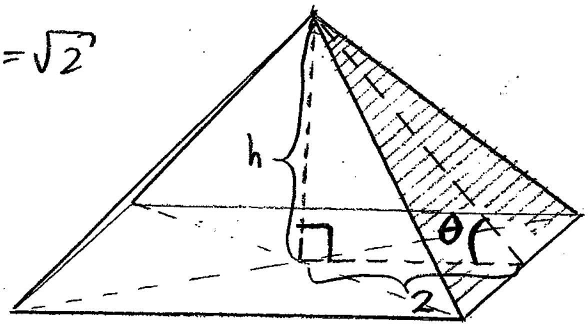


$$4^2 = h^2 + (2\sqrt{2})^2$$
$$16 = h^2 + 8 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$$

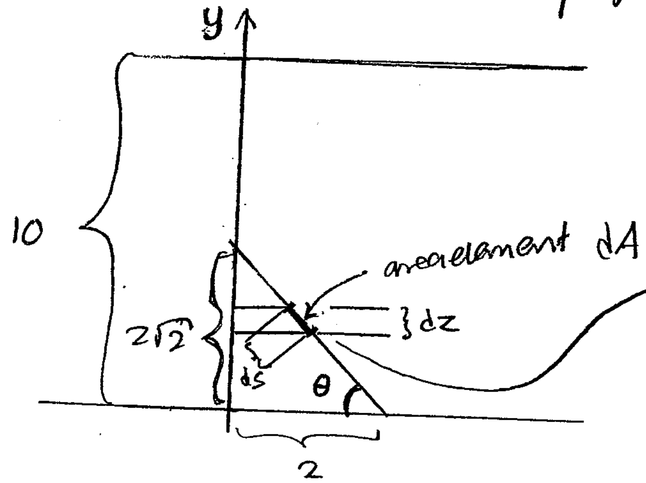
Vi är dessutom intressade av vinkeln θ som en triangulär yta ligger över basplanet:

Vi har $\tan\theta = \frac{h}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

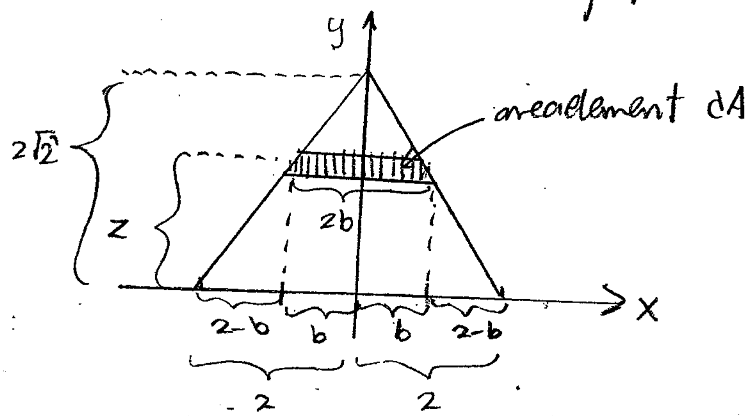
$\Rightarrow \theta = \arctan\sqrt{2}$



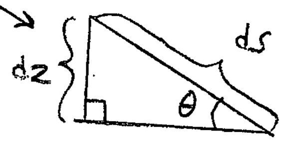
Sett från sidan av triangelytan:



Sett från framsidan av triangelytan:



Vi vill beräkna areaelementet dA:s storlek om den ligger på avståndet z från botten.



Vi har ds enligt:

$\frac{dz}{ds} = \sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow ds = \frac{dz}{\sin\theta}$

Bredden på areaelementet, dvs 2b, är given genom likformighet:

$$\frac{2-b}{z} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2-b = \frac{z}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow b = 2 - \frac{z}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2b = 2\left(2 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

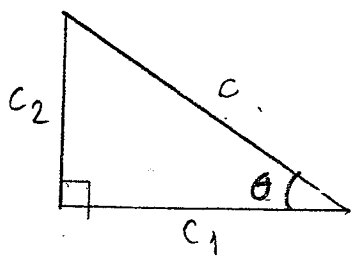
$$\Rightarrow dA = 2b\,ds = 2\left(2 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)\frac{dz}{\sin\theta}$$

Djupet är $10 - z$ för en punkt z ovan botten.
Trycket blir där $p = dg(10-z)$. Detta ger på areaelementet ett kraftelement

$$dF = p\,dA = \delta g(10-z)\cdot 2\left(2-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\frac{dz}{\sin\theta} =$$
$$= 2\frac{\delta g}{\sin\theta}(10-z)\left(2-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)dz$$

Totalt fås kraften

$$F = \int_{z=0}^{z=h} dF = \int_0^{2\sqrt{2}} 2\frac{\delta g}{\sin\theta}(10-z)\left(2-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)dz =$$
$$= 2\frac{\delta g}{\sin\theta}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(20-\frac{10}{\sqrt{2}}z-2z+\frac{1}{\sqrt{2}}z^2\right)dz =$$
$$= 2\frac{\delta g}{\sin\theta}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(20-2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+1\right)z+\frac{1}{\sqrt{2}}z^2\right)dz =$$
$$= 2\frac{\delta g}{\sin\theta}\left(20z-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+1\right)z^2+\frac{1}{3\sqrt{2}}z^3\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}} =$$
$$= 2\frac{\delta g}{\sin\theta}\left(40\sqrt{2}-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+1\right)\cdot 8+\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right) =$$
$$= 2\frac{\delta g}{\sin\theta}\left(40\sqrt{2}-\frac{40}{\sqrt{2}}-8+\frac{16}{3}\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right] =$$
$$= 2\frac{\delta g}{\sin\theta}\left(40\sqrt{2}-20\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right) = 2\left(20\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)\frac{\delta g}{\sin\theta}$$



$$\frac{c_2}{c_1} = \tan\theta \Leftrightarrow c_2 = c_1\tan\theta \quad (*)$$
$$\sin\theta = \frac{c_2}{c} = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \overset{(*)}{=} \frac{c_1\tan\theta}{\sqrt{c_1^2+c_1^2\tan^2\theta}} =$$
$$= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \left[\tan\theta = \sqrt{2}\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2/3}$$

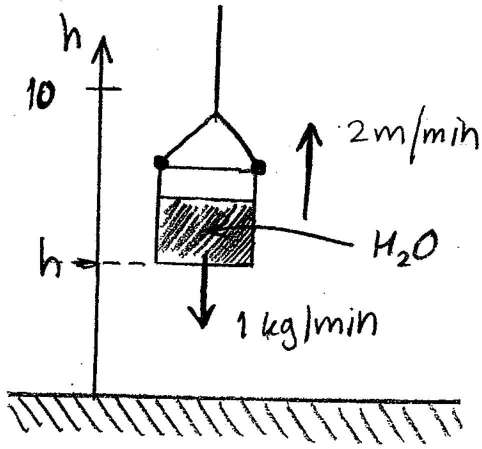
$[\delta = 1000\ kg/m^3,\ g = 9.8\ m/s^2]$

$$\Rightarrow F = 2\left(20\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)\frac{1000\cdot 9.8}{\sqrt{2/3}} = 2\cdot 9800\sqrt{\frac{3}{2}}\left(20\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right) =$$
$$= 19600\left(20\sqrt{3}-\frac{8}{\sqrt{6}}\right) \approx 6.15\times 10^5\ N$$

(motsv. c:a 63 tons tyngd)

7.6:12 En hink hissas upp från marken med farten 2 m/min. Hinken väger 1 kg och innehåller i början 15 kg vatten som läcker ut med hastigheten 1 kg/min. Hur stort arbete krävs för att lyfta upp hinken 10 m?

Lösning: Se figur:



Det gäller att

$$h = vt = 2t$$

där h höjden vid tiden t.

Alltså, $t = h/2$. (*)

Massan hos hinken + vattnet ges efter tiden t min som:

$$m = (15+1) - 1 \cdot t = 16 - t$$

Men vi vet ju (*) så $m = 16 - \frac{h}{2}$ (d.v.s. vid höjden h har man totala massan $16 - \frac{h}{2}$).

Det krävs ett arbete $dW = F\,dh$ för att lyfta hinken en liten höjd dh där tyngdkraften F ges av $F = mg = (16 - \frac{h}{2})g$. Totalt arbete för att lyfta från $h=0$ till $h=10$ blir då:

$$W = \int_{h=0}^{h=10} dW = \int_0^{10} (16 - \frac{h}{2}) g\,dh = g\int_0^{10} (16 - \frac{1}{2}h)\,dh =$$

$$= g\left(16h - \frac{1}{4}h^2\right)\Big|_0^{10} = g\left(16 \cdot 10 - \frac{1}{4} \cdot 100\right) =$$

$$= (160 - 25)g = 135g \approx 135 \cdot 9.8 \approx 1.32 \times 10^3 \text{ Nm}$$