

RÄKNEÖVNING 9

9.1:10 Bestäm huruvida talföljden $\left\{ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right\}$ är

(a) begränsad (uppåt eller nedåt), (b) positiv eller negativ (slutligen), (c) växande, avtagande eller alternerande, och (d) konvergent, divergent, eller divergent mot $\pm \infty$.

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{n! \cdot n!}{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot n!} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+n) \cdot (n+n-1) \cdots (n+3)(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n}{n+n} \cdot \frac{n-1}{n+n-1} \cdots \frac{3}{n+3} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdots \frac{3}{n+3} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \quad (*) \end{aligned}$$

(b) Talföljden är positiv ty $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$
(till och med strikt olikhet).

(a) Ur (b) ses att t.ex. 0 är en undre begränsning.

Ur (*) ser vi att $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{2}$

ty $\frac{n-1}{2n-1} \leq \frac{2n-1}{2n-1} = 1, \dots, \frac{1}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1$

Alltså är $\frac{1}{2}$ en övre begränsning.

(c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdots \frac{2}{n+3} \cdot \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdots \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}} =$

$$= \frac{(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdot n \cdots 2 \cdot 1}{(2n+1) \cdots (n+3)(n+2) \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{(n+1) \cdot n}{(2n+1) \cdot 2n} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n+1}{2n+1} < \frac{1}{2} \frac{2n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n < a_n$, d.v.s avtagande

(d) Enligt (*) gäller

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n}{2n} \frac{n-1}{2n-1} \cdots \frac{3}{n+3} \frac{2}{n+2} \frac{1}{n+1} \leq$$

$$\leq \left[\text{Faktor } \frac{j}{n+j} \text{ kräver } n \geq j \Rightarrow \frac{j}{n+j} \leq \frac{j}{j+j} = \frac{1}{2} \right] \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{n \text{ faktorer}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (konvergent) så fås

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0 \text{ d.v.s. konvergent.}$$

9.1:24 Bestäm om möjligt gränsvärdet till $\{a_n\}$
om $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$.

Lösning: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 4n}) = [\text{Förl. m. konj.}] =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 - 4n})(n + \sqrt{n^2 - 4n})}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 - 4n)}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} =$$

$$= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4/n}} = 4 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 0}} =$$

$$= 4 \frac{1}{1+1} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

[dividera m. $\frac{1}{n}$
i täljare och
härnare]

9.1:28 Bestäm om möjligt gränsvärdet till $\{a_n\}$
 om $a_n = \frac{n^2 2^n}{n!}$.

Lösning: Vi skriver $a_n = \frac{n^2 2^n}{n!} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{(2^n)^2}{n!} =$
 $= \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{(2^2)^n}{n!} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{4^n}{n!}$

Att $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ för $\underbrace{\frac{n^2}{2^n}}_{=b_n} \underbrace{\frac{4^n}{n!}}_{=c_n}$

vi betrakta som ett standardgränsvärde. ((B5) i gröna boken)

På föreläsningen visade vi att $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (*)

för all $x \in \mathbb{R}$. Alltså måste $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n!} = 0$
 ((*) med $x=4$). (Se också (B9) i gröna boken.)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \cdot c_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \cdot 0 = 0.$$

9.2:8 Bestäm summan av, alternativt avgör
 om man har konvergens eller divergens för
 serien $\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos j\pi$.

Lösning: Vi vet enligt en sats att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerar} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (*)$$

I vårt fall har vi $a_n = \pi^{n/2} \cos n\pi =$
 $= \pi^{n/2} (-1)^n$

Uppenbarligen gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \pi^{1/2}$ inte existerar ($\{a_n\}$ obegränsad) så enligt (*)
 Så kan inte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergera, d.v.s. serien
 $\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2} \cos j\pi$ divergerar.

9.2:10 Bestäm summan av, alternativt avgör om man har konvergens eller divergens för, serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$.

Lösning:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3^2 3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^2 3^n} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \right) + \frac{1}{9} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{3+1}{9} = \\ &= \left[\text{Geom. serie m. } a=r=\frac{1}{3} \text{ resp. } a=r=\frac{2}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1}{9} \frac{2/3}{1-2/3} + \frac{4}{9} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{3-1} + \frac{1}{9} \frac{2}{3-2} + \frac{4}{9} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{1} + \frac{4}{9} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{6} + \frac{6}{9} = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

9.2:14 Bestäm summan av, alternativt avgör om man har konvergens för, serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Lösning: Partialbråksuppdelning $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &\stackrel{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \\ &= \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{A(n^2+3n+2) + B(n^2+2n) + C(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{(A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + 2A}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

d.v.s. $\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$, vi ser direkt att $A=\frac{1}{2}$.
De två övriga blir då:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + B + C = 0 \\ \frac{3}{2} + 2B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{2} - B \\ \frac{3}{2} + 2B + C = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Sätt in (1) i (2): $\frac{3}{2} + 2B - \frac{1}{2} - B = 0 \Rightarrow B = -1$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} C = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

Alltså, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$ (*)

Delsumman: $S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)(j+2)} = [\text{Enl. (*)}] =$
 $= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{2}{j+1} + \frac{1}{j+2} \right) =$ (5)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right] = \dots
\end{aligned}$$

= [Termen med pilar från eller till sig tas ut] =

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Serien konvergerar och har summan $1/4$.

9.2:22 Antag att bank betalar 10 % ränta per år in i ett bankkonto som är tomt från början som fylls på med 1000 dollar vid varje års början. Hur mycket pengar finns på kontot efter 8 år?

Lösning: Efter 0 år: 1000 dollar
 Efter 1 år: $1000 \cdot 1.1 + 1000$
 Efter 2 år: $(1000 \cdot 1.1 + 1000) \cdot 1.1 + 1000$
 $\vdots$
 $= 1000(1.1^2 + 1.1 + 1)$
 Efter 7 år: $1000(1.1^7 + 1.1^6 + \dots + 1.1 + 1)$

Efter 8 år förränta pengar med ytterligare en faktör 1.1 men vi stoppar inte in några nya pengar:

$$\text{Efter 8 år: } 1000(1.1^8 + 1.1^7 + \dots + 1.1^2 + 1.1)$$

$$\text{Låt } S_8 = 1000(1.1^8 + 1.1^7 + \dots + 1.1^2 + 1.1)$$

$$\Rightarrow 1.1 \cdot S_8 = 1000(1.1^9 + 1.1^8 + \dots + 1.1^3 + 1.1^2)$$

Vi får då

$$1.1 \cdot S_8 - S_8 = 1000(1.1^9 - 1.1)$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{1000(1.1^9 - 1.1)}{1.1 - 1} = \frac{1000}{0.1}(1.1^9 - 1.1) =$$

$$= 10000 \cdot 1.1 \cdot (1.1^8 - 1) = 11000 \cdot (1.1^8 - 1) \approx$$

$$\approx 11000 \cdot (2.1435888 - 1) =$$

$$= 11000 \cdot 1.1435888 \approx$$

$$\approx 12579 \text{ dollar}$$