Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Tentamen 2010-01-15 kl. 08:00–13:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p.) Aspektuppgiften markerad A kan höja betyget om den är löst tillräckligt väl.

1. **a)** Visa med hjälp av den formella gränsvärdesdefinitionen (d.v.s. med ε–δ-formalism) att $\lim_{x\to 3}(2x-5)=1$. (1p)

b) Antag att $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$, $x\neq 5$. Är $x=5$ en hävbar diskontinuitet? Om så är fallet, bestäm den kontinuerliga utvidgningen $g(x)$ till $f(x)$ i $x=5$, d.v.s. g är kontinuerlig och $g(x)=f(x)$ för alla $x\neq 5$. (1p)

2. Bestäm integralerna nedan.

a) $\int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$. (1p)

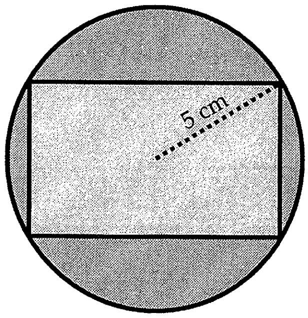
b) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}$. (1p)

c) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. (1p)

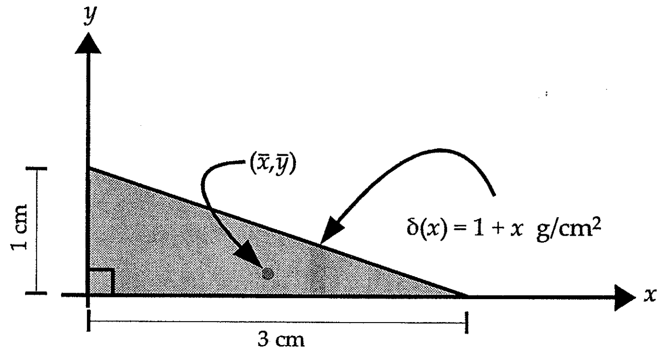
3. Bestäm den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x$. (3p)

4. En rektangel är inskriven i en cirkel med radien 5 cm. Antag att längden på ena sidan hos rektangeln minskar med hastigheten 2 cm per sekund. Med vilken hastighet ändras rektangelarean i det ögonblick då nämnda rektangelsidlängd är 6 cm? (Ledtråd: Se Figur 1.) (3p)

5. Bestäm masscentrum $(\bar{x},\bar{y})$ för en rätvinklig triangel med kateterna 1 cm och 3 cm om masstätheten ges av $\delta(x)=1+x$ g/cm^2 där x är avståndet i cm till den kortare kateten. (Ledtråd: Se Figur 2.) (3p)



Figur 1. Rektangeln i Uppgift 4.



Figur 2. Triangeln i Uppgift 5.

6. Använd en Maclaurinserieutveckling för att bestämma $\arctan 0.5$ med ett fel på mindre än 0.001. (Ledtråd: $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $x \in [-1, 1]$.) (3p)

7. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. (3p)

8. **a)** Bestäm den allmänna lösningen till $y'' + y' - 2y = 18xe^x$. (2p)

b) Använd den förbättrade Eulerstegmetoden med steglängden $h = 0.25$ för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

på intervallet $[1, 2]$. (2p)

A. Formulera och bevisa Integralkriteriet.

LÖSNINGAR TILL TENTAN 2010-01-15

1. a) $\lim_{x\to 3}(2x-5) = 1$ betyder formellt:

För varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-5)-1| < \varepsilon$$

Låt oss titta närmare på $HL_{\Rightarrow}$:

$$|(2x-5)-1| = |2x-6| = 2|x-3|$$

Detta är $< \varepsilon$ omm $2|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |x-3| < \varepsilon/2$$

Välj därför $\delta = \varepsilon/2$. Då gäller implikationen ovan.

b) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x-5} = x+5$

$\Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x) = 5+5 = 10$, d.v.s.

gränsvärdet existerar (och är ändligt).

Detta innebär att $x=5$ är en hävbar diskontinuitet.

Definiera $g(x) = x+5$, $x \in \mathbb{R}$. Eftersom g kontinuerlig och $g(x) = f(x)$ för alla $x \neq 5$ så är g kontinuerliga utvidgningen till f i $x=5$.

---

2. a) $\int \ln(1+x^2)\,dx = \int u\,dv \overset{P.I.}{=} uv - \int v\,du =$

$= [$ Låt $u = \ln(1+x^2)$, $dv = dx$

d.v.s. $du = \frac{2x}{1+x^2}dx$, $v = x\,] =$

$$= \ln(1+x^2)\cdot x - \int x \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int\left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int 1\,dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$$

b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x} = \int_1^3 \frac{dx}{x(x^2+1)} = (*)$

Partialbråksuppdela integranden:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} \overset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} A+B = 0 & (1) \\ C = 0 & (2) \\ A = 1 & (3) \end{cases}$$

Låt $A=1$ (av (3)) i (1): $1+B=0 \Leftrightarrow B=-1$

$$\Rightarrow A=1,\ B=-1,\ C=0$$

$$\Rightarrow (*) = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{(-1)x+0}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x}{x^2+1} = \left[\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x \right]$$

$$= (\ln|x|)\Big|_1^3 - \frac{1}{2}(\ln|x^2+1|)\Big|_1^3 =$$

$$= \left(\ln|x| - \ln\left(|x^2+1|^{1/2}\right) \right)\Big|_1^3 =$$

$$= \left(\ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)\Big|_1^3 = \ln \frac{3}{\sqrt{3^2+1}} - \ln \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} =$$

$$= \ln\left(\frac{3}{\sqrt{10}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \ln \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}} =$$

$$= \ln \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad (\approx 0.2939)$$

c) $$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \left[\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases} \right] =$$

$$= \int \sin u \cdot 2\, du = 2 \int \sin u\, du =$$

$$= 2(-\cos u) + C = C - 2\cos\sqrt{x}$$

3. $$\int_{-\infty}^{0} x e^x \, dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 x e^x \, dx =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \int_{x=R}^{x=0} u \, dv \overset{P.I.}{=} \lim_{R\to-\infty} \left((uv)\Big|_{x=R}^{x=0} - \int_{x=R}^{x=0} v\,du \right)$$

$$= \left[\text{Låt } u = x, \quad dv = e^x dx \right.$$
$$\left. \text{d.v.s. } du = dx, \quad v = e^x \right] =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \left((xe^x)\Big|_R^0 - \int_R^0 e^x dx \right) =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \left((xe^x)\Big|_R^0 - (e^x)\Big|_R^0 \right) =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \left((x-1)e^x\right)\Big|_R^0 =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \left((0-1)e^0 - (R-1)e^R \right) =$$

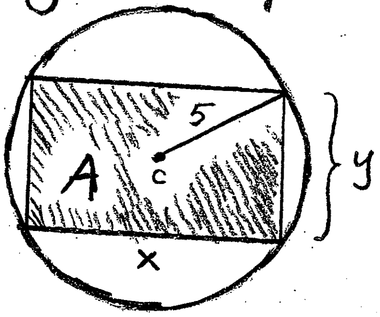
$$= -1 + \lim_{R\to-\infty} \left((1-R)e^R \right) = -1 + 0 = -1$$

ty $\lim_{R\to-\infty} e^R = 0$, $\lim_{R\to-\infty} (Re^{-R}) = 0$

4. Inför beteckningar enligt figuren nedan:

$\frac{dx}{dt} = -2$ cm/s

($x = 6$ cm vid fryst ögonblick)

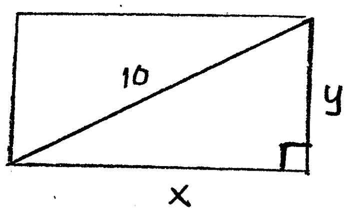


(c = cirkelns centrum)

Arean: $A = xy$

Rektangelns diagonal: $2 \cdot 5$ cm $= 10$ cm

Pythagoras ger därför:



$$x^2 + y^2 = 10^2$$

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad A = x\sqrt{100-x^2}$$

Derivera implicit m.a.p. t (vi vet ju att $x = x(t)$ och därmed $A = A(t)$):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}\sqrt{100-x^2} + x\frac{-2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{100-x^2}} =$$

$$= \frac{dx}{dt}\left(\sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{dx}{dt}\frac{(100-x^2)-x^2}{\sqrt{100-x^2}} =$$

$$= 2\frac{dx}{dt}\frac{50-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \left[\frac{dx}{dt} = -2, x = 6\right] =$$

$$= 2 \cdot (-2) \cdot \frac{50-6^2}{\sqrt{100-6^2}} = -4\frac{50-36}{\sqrt{100-36}} =$$

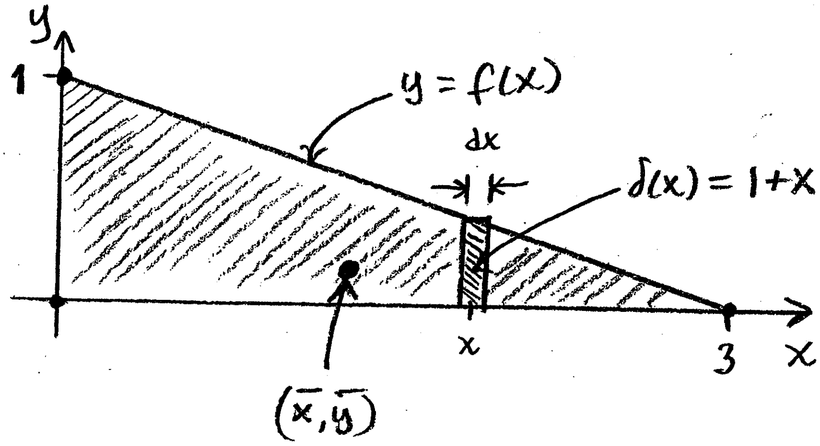
$$= -4 \cdot \frac{14}{\sqrt{64}} = -4 \cdot \frac{14}{8} =$$

$$= -\frac{14}{2} = -7 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Arean minskar alltså med 7 cm²/s då rektangelsidan är 6 cm.

⑤

5. Figur:



Funktionen f ges enligt: $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x$
(ty linjär och $f(0) = 1$, $f(3) = 0$).

Den smala rektangeln i figuren med bredd dx och höjd $f(x)$ har massan

$$dm = \underbrace{\delta(x)}_{\text{densitet}} \underbrace{f(x)\,dx}_{\text{area}} = (1+x)\left(1-\frac{1}{3}x\right)dx$$

$\Longrightarrow$ Total massa: (i gram)

$$m = \int_{x=0}^{x=3} dm = \int_0^3 (1+x)\left(1-\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (1+x)(3-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (3-x+3x-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (3+2x-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x+x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\Big((9+9-9)-0\Big) = 3$$

Den smala rektangeln har momentet $dM_{x=0}$ kring y-axeln, och det ges av

$$dM_{x=0} = x\,dm = x(1+x)\left(1-\frac{1}{3}x\right)dx$$

$\Rightarrow$ Totalt moment kring y-axeln:

$$M_{x=0} = \int_{x=0}^{x=3} dM_{x=0} = \int_0^3 x(1+x)(1-\tfrac{1}{3}x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (x+x^2)(3-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (3x-x^2+3x^2-x^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 (3x+2x^2-x^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3 =$$

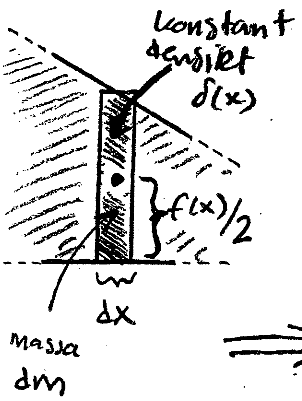
$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2}\cdot 9+\frac{2}{3}\cdot 27-\frac{1}{4}\cdot 81\right)-0\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot 9-\frac{1}{4}\cdot 27 =$$

$$= \frac{9}{2}+6-\frac{27}{4} = \frac{18+24-27}{4} = \frac{15}{4}$$

Detta ger $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{m} = \dfrac{15/4}{3} = \dfrac{5}{4}$ cm

Den smala rektangeln har momentet $dM_{y=0}$ kring x-axeln där



$$dM_{y=0} = \frac{f(x)}{2}\cdot dm =$$

$$= \frac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3}x)\cdot(1+x)(1-\tfrac{1}{3}x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}(1+x)(1-\tfrac{1}{3}x)^2\,dx$$

$\Rightarrow$ Totalt moment kring x-axeln:

$$M_{y=0} = \int_{x=0}^{x=3} dM_{y=0} = \int_0^3 \frac{1}{2}(1+x)\left(1-\frac{1}{3}x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 (1+x)\left(\frac{1}{3}(3-x)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}\int_0^3 (1+x)(3-x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 (1+x)(9-6x+x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 (9-6x+x^2+9x-6x^2+x^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^3 (9+3x-5x^2+x^3)\,dx =$$

$$= \frac{1}{18}\left(9x+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{18}\left(\left(27+\frac{3}{2}\cdot 9-\frac{5}{3}\cdot 27+\frac{1}{4}\cdot 81\right)-0\right) =$$

$$= \frac{1}{18}\left(27+\frac{27}{2}-45+\frac{81}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3+\frac{3}{2}-5+\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-2+\frac{9}{4}\right) =$$

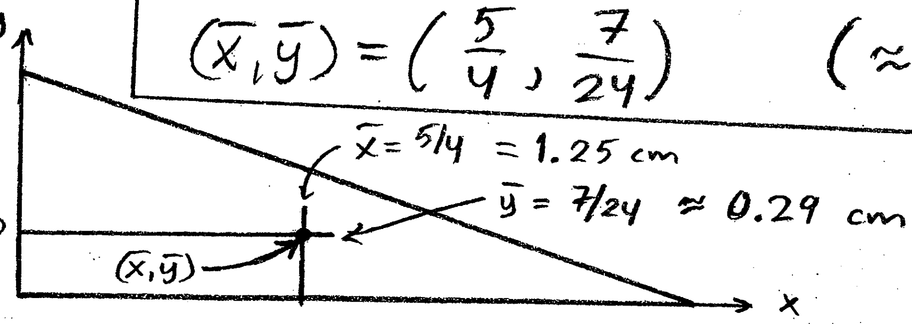
$$= \frac{1}{2}\,\frac{6-8+9}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{7}{4} = \frac{7}{8}$$

Detta ger $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{m} = \dfrac{7/8}{3} = \dfrac{7}{24}$ cm

Masscentrum är alltså (i cm)

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{5}{4},\frac{7}{24}\right)} \qquad (\approx (1.25, 0.29))$$

Figur:



OBS: Jämför m. centroiden $(1, \frac{1}{3})$ som ligger en bit upp till vänster om $(\bar{x},\bar{y})$.

6.

$$\arctan 0.5 = \arctan \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2} \in [-1,1] \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots$$

Vi vill ha ett fel $< 0.001 = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$ vid trunkering av Maclaurinserien ovan.

Alternerande serie $\Rightarrow$ felet till absolutbeloppet är $\leq$ absolutbeloppet hos första kastade termen:

$$|\text{fel}| \leq \left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \right| < \frac{1}{1000} \qquad (*)$$

om $\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ första kastade termen.

Vi kan skriva $(*)$ som

$$\frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}} < \frac{1}{1000}$$

$$(2n+1) \cdot 2^{2n+1} > 1000$$

$2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{2n} = 2 \cdot (2^2)^n = 2 \cdot 4^n$

$$(2n+1) \cdot 4^n > 500 \qquad (\dagger)$$

$$VL_{(\dagger)}(n=3) = (2 \cdot 3 + 1) \cdot 4^3 = 7 \cdot 64 = 448 < 500,$$

Så $n = 3$ funkar ej.

$$VL_{(\dagger)}(n=4) = (2 \cdot 4 + 1) \cdot 4^4 = 9 \cdot 256 = 2304 > 500,$$

Så $n=4$ funkar. Vi kan alltså kasta bort $n=4,5,6,7,\ldots$:

$$\arctan 0.5 \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} =$$

$\boxed{\text{fel} < 0.001}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{128} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} = 0.463467\ldots$$

($\arctan 0.5 = 0.463647\ldots$, vi ser att felet i approximationen är ungefär $0.0002 < 0.001$)

---

7. $VL_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, $HL_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$

Ska visa $VL_n = HL_n$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

- Startsteg ($n=1$): $VL_1 = HL_1$? Vi har:

$$\begin{cases} VL_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \\ HL_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

d.v.s. $VL_1 = HL_1$, startsteget verifierat.

- Induktionssteg: Gäller implikationen

$$VL_p = HL_p \Rightarrow VL_{p+1} = HL_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+ ?$$

Antag $VL_p = HL_p$ (induktionsantagande).
Då gäller

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} + \frac{p+1}{2^{p+1}} =$$

$$= VL_p + \frac{p+1}{2^{p+1}} = \{\text{Ind.ant.}\} =$$

$$= HL_p + \frac{p+1}{2^{p+1}} = \left(2 - \frac{p+2}{2^p}\right) + \frac{p+1}{2^{p+1}} =$$

$$= 2 - \frac{2(p+2)}{2 \cdot 2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} =$$

$$= 2 - \frac{2p+4}{2^{p+1}} + \frac{p+1}{2^{p+1}} =$$

$$= 2 - \frac{(2p+4)-(p+1)}{2^{p+1}} =$$

$$= 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}} = 2 - \frac{(p+1)+2}{2^{p+1}} = HL_{p+1}$$

d.v.s. induktionssteget verifierat.
Enligt induktionsprincipen gäller då att

$$VL_n = HL_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \qquad \square$$

---

8. a) $y'' + y' - 2y = 18xe^x \quad (*)$

Allmänna lösningen kan skrivas

$$y = y_h + y_p$$

där y_h allmänna lösningen till den

homogena versionen av (*), och y_p är vilken partikulärlösning som helst till (*).

Homogen ekvation: $y'' + y' - 2y = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Vi ansätter en partikulärlösning enligt

$$y_p = x(Ax+B)e^x =$$
$$= (Ax^2 + Bx)e^x \qquad (\dagger)$$

ty $y_p = (Ax+B)e^x$ hade inte funkat eftersom termen Be^x i detta y_p är en lösning till homogena ekvationen. (Måste alltså mult. med x.) Derivera $(\dagger)$:

$$y_p' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x =$$
$$= (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x$$

$$\Rightarrow y_p'' = (2Ax + (2A+B))e^x +$$
$$+ (Ax^2 + (2A+B)x + B)e^x =$$

$$= \left(Ax^2 + (4A+B)x + 2(A+B)\right)e^x$$

Sätt in y_p, y_p' och y_p'' i (*):

$$\left(Ax^2 + (4A+B)x + 2(A+B)\right)e^x +$$
$$+ \left(Ax^2 + (2A+B)x + B\right)e^x -$$
$$- 2(Ax^2 + Bx)e^x = 18xe^x$$

Dividera detta med e^x:

$$Ax^2 + (4A+B)x + 2(A+B) + Ax^2 + (2A+B)x + B -$$
$$- 2Ax^2 - 2Bx = 18x$$

Samla ihop termer av samma grad:

$$0 \cdot x^2 + 6Ax + (2A+3B) = 18x$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2: & 0 = 0 & (1) \\ x: & 6A = 18 & (2) \\ \text{konst.}: & 2A+3B = 0 & (3) \end{cases}$$

Ur (2) fås $A = 3$, vilket i (3) ger

$$2 \cdot 3 + 3B = 0 \Leftrightarrow B = -2$$

Vi har alltså partikulärlösningen

$$y_p = (3x^2 - 2x)e^x$$

Den allmänna lösningen är därför:

$$y = y_n + y_p =$$
$$= C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + (3x^2 - 2x)e^{x} =$$
$$= (3x^2 - 2x + C_1)e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

b) Begynnelsevärdesproblem $\begin{cases} y' = xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$ och

steglängd $h = 0.25$, lösa över $[1,2]$

med den förbättrade Eulerstegmetoden.

Det gäller att $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

med $f(x,y) = xy$, $x_0 = 1$ och $y_0 = 1$.

Iterationsformler för den förbättrade Euler-metoden:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.25 \\ u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = \\ \qquad = y_n + 0.25 \cdot x_n y_n = y_n(1 + 0.25 \cdot x_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})}{2} = \\ \qquad = y_n + 0.125 \cdot (x_n y_n + x_{n+1} u_{n+1}) \end{cases}$$

Detta ger stegen:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0.25 = 1 + 0.25 = 1.25 \\ u_1 = y_0(1 + 0.25 \cdot x_0) = 1 \cdot (1 + 0.25 \cdot 1) = \\ \quad = 1 \cdot (1 + 0.25) = 1.25 \\ y_1 = y_0 + 0.125 \cdot (x_0 y_0 + x_1 u_1) = \\ \quad = 1 + 0.125 \cdot (1 \cdot 1 + 1.25 \cdot 1.25) \approx 1.3203 \end{cases}$$

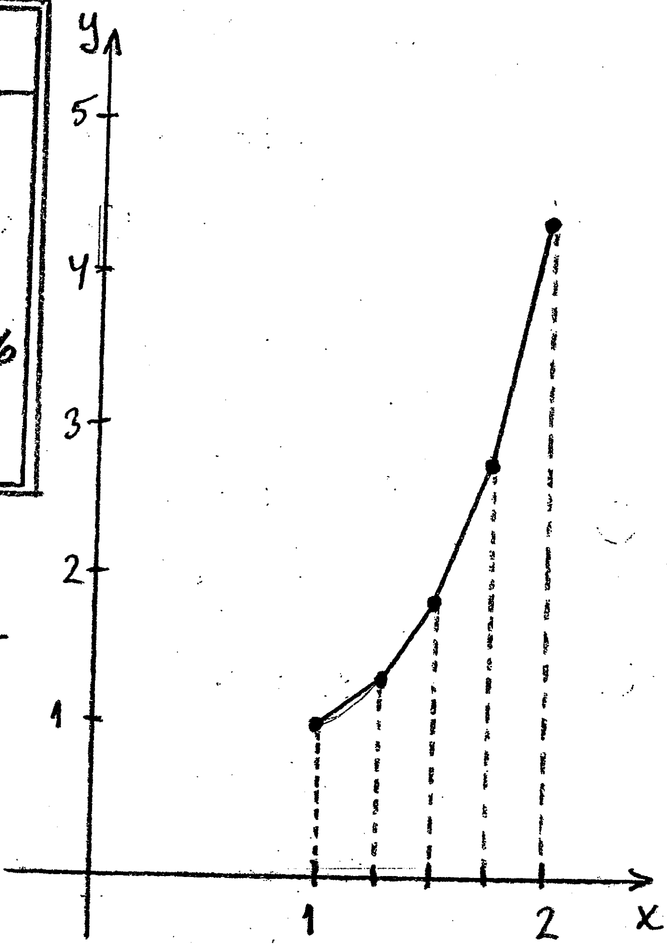
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0.25 = 1.25 + 0.25 = 1.5 \\ u_2 = y_1(1 + 0.25 \cdot x_1) \approx 1.3203 \cdot (1 + 0.25 \cdot 1.25) \approx \\ \quad \approx 1.7329 \\ y_2 = y_1 + 0.125 \cdot (x_1 y_1 + x_2 u_2) \approx \\ \quad \approx 1.3203 + 0.125 \cdot (1.25 \cdot 1.3203 + 1.5 \cdot 1.7329) \approx \\ \quad \approx 1.8515 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + 0.25 = 1.5 + 0.25 = 1.75 \\ u_3 = y_2(1 + 0.25 \cdot x_2) \approx 1.8515 \cdot (1 + 0.25 \cdot 1.5) \approx \\ \quad \approx 2.5459 \\ y_3 = y_2 + 0.125 \cdot (x_2 y_2 + x_3 u_3) \approx \\ \quad \approx 1.8515 + 0.125 (1.5 \cdot 1.8515 + 1.75 \cdot 2.5459) \approx \\ \quad \approx 2.7556 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + 0.25 = 1.75 + 0.25 = 2 \\ u_4 = y_3(1 + 0.25 \cdot x_3) \approx 2.7556 \cdot (1 + 0.25 \cdot 1.75) \approx \\ \quad \approx 3.9612 \\ y_4 = y_3 + 0.125 \cdot (x_3 y_3 + x_4 u_4) \approx \\ \quad \approx 2.7556 + 0.125 \cdot (1.75 \cdot 2.7556 + 2 \cdot 3.9612) \approx \\ \quad \approx 4.3487 \end{cases}$$

d.v.s. den numeriska lösningen ges av tabellen

x	y
1.00	1.0000
1.25	1.3203
1.50	1.8515
1.75	2.7556
2.00	4.3487



Se figur:

(Exakt lösning

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}(x^2-1)}$$

kan fås genom att $y' = xy$ separabel. Felet $e_n = y_n - y(x_n)$ visar sig vara $e_0 = 0$, $e_1 \approx -0.0045$, $e_2 \approx -0.0167$, $e_3 \approx -0.0490$, $e_4 \approx -0.1330$.

I grafen skulle felet enbart bli tydligt vid $x \approx 2$.)

A. Se Föreläsning 10 s. 1ff.