Mittuniversitetet

MID SWEDEN UNIVERSITY

Andra exempeltentan 2010-01-08 kl. 12:15–14:00

Miniräknare: Ej symbolhanterande. Formelsamling: Tabeller och formler för NV- och TE-programmen; Formler och tabeller i fysik, matematik och kemi för gymnasieskolan; TEFYMA; eller Formler och tabeller (Natur och Kultur).

Lösningarna bör vara så pass fullständigt dokumenterade att en läsare kan följa alla moment utan att behöva fylla i saknade steg.

Betyg sätts efter hur väl lärandemålen är uppfyllda. Riktvärden för betygen är: A 22p, B 18p, C 14p, D 10p, E 9p. (Max: 24p.) Aspektuppgiften markerad A kan höja betyget om den är löst tillräckligt väl.

1. a) Visa med hjälp av den formella definitionen av gränsvärde (d.v.s. med ε–δ-formalism) att $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}e^x = 0$. (1p)

b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{om } x \leqslant 0, \\ (x-1)^2 & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

Beräkna $f'(x)$ för $x \neq 0$ m.h.a. derivatans informella definition. Är f deriverbar i $x = 0$? (1p)

2. Bestäm integralerna nedan.

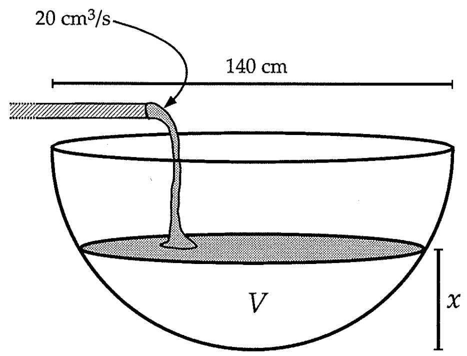
a) $\int_0^1 x^5 e^{x^3}\,dx$. (1p)

b) $\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$. (1p)

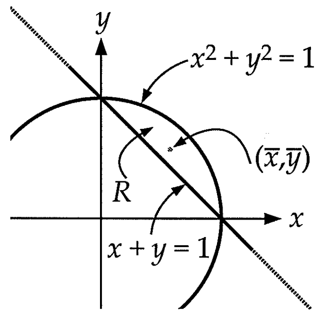
c) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1+4x^2)^{3/2}}$. (1p)

3. Bestäm den generaliserade integralen $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^{4/5}}$. (3p)

4. En halvklotsformad vattenskål med diametern 140 cm fylls på med hastigheten 20 kubikcentimeter per sekund. Hur snabbt stiger vattenytan då djupet är 35 cm? (Ledtråd: Se Figur 1 samt notera att ett klotsegment med djupet x har volymen $\pi r x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3$ om klotradien är r.) (3p)



Figur 1. Den halvklotformade skålen i Uppgift 4.



Figur 2. Området R och centroiden $(\bar{x}, \bar{y})$ i Uppgift 5.

5. Bestäm centroiden $(\bar{x}, \bar{y})$ för området R begränsat av kurvorna $x^2 + y^2 = 1$ och $x + y = 1$. (Ledtråd: Se Figur 2.) (3p)

6. Använd en Maclaurinserieutveckling för att beräkna $\ln 11 - \ln 10$ med fyra decimalers noggrannhet. (Ledtråd: Använd Maclaurinserien $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.) (3p)

7. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{k} \ell \right)^{-1} = \frac{2n}{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. (3p)

8. Bestäm de allmänna lösningarna till differentialekvationerna nedan.

a) $xy' - 2y = x^3 e^{x^5}$. (2p)

b) $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0 \qquad (x > 0)$. (2p)

A. Bevisa följande sats:

Sats: (i) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Om $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ eller inte existerar så divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

LÖSNINGAR TILL ANDRA EXEMPELTENTAN

1. a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}e^x = 0$ betyder formellt:

För varje $\varepsilon>0$ finns $R<0$ s.a.

$$x<R \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2}e^x - 0\right| < \varepsilon$$

Det gäller att $\left|\frac{1}{x^2}e^x-0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}e^x < \varepsilon \qquad (*)$$

Eftersom $e^x < 1$ för $x<0$ så uppfylls $(*)$ om $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ och $x<0$.

Men $\frac{1}{x^2}<\varepsilon \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

om $x<0$ antas. Alltså, välj $R = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Då fås

$$x<R \left(=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<0\right) \underset{\text{[enl. ovan]}}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{x^2}e^x - 0\right| < \varepsilon$$

och vi är klara. $\square$

b) Vi har $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x\le 0 \\ (x-1)^2, & x>0 \end{cases}$.

Vi beräknar derivatan för $x\neq 0$:

• $x<0$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)^2-(x+1)^2}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+h^2+1^2+2xh+2x+2h-x^2-2x-1^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh+2h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h+2(x+1)\right) =$$

$$= 2(x+1)$$

• $\underline{x>0:}$ $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1)^2-(x-1)^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+h^2+1^2+2xh-2x-2h-x^2+2x-1^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h+2(x-1)\right) =$$

$$= 2(x-1)$$

Är f deriverbar i $x=0$, d.v.s. finns $f'(0)$?

Vi har (notera $f(0)=1$):

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0_-} \dfrac{(h+1)^2-1}{h}, & h<0 \\ \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{(h-1)^2-1}{h}, & h<0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0_-} \dfrac{(h^2+2h+1)-1}{h}, & h<0 \\ \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{(h^2-2h+1)-1}{h}, & h>0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0_-} (h+2), & h<0 \\ \lim\limits_{h\to 0_+} (h-2), & h>0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & h<0 \\ -2, & h>0 \end{cases}$$

d.v.s $f'(0)$ existerar ej. Då kan inte f vara deriverbar i $x=0$.

2. a) $\int_0^1 x^5 e^{x^3}dx = \int_0^1 x^3 \cdot x^2 e^{x^3} dx = \int_0^1 u\,dv \overset{P.I.}{=}$

$= (uv)\Big|_0^1 - \int_0^1 v\,du =$

$= [$ Låt $u = x^3$, $dv = x^2 e^{x^3}dx$

d.v.s. $du = 3x^2dx$, $v = \frac{1}{3}e^{x^3}$ $] =$

$= (x^3 \cdot \frac{1}{3}e^{x^3})\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{x^3} \cdot 3x^2 dx =$

$= (\frac{1}{3}e - 0) - \int_0^1 x^2 e^{x^3}dx =$

$= \frac{1}{3}e - (\frac{1}{3}e^{x^3})\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}(e-1) = \frac{1}{3}$

b) $\int \frac{2x^2+3}{x^3-2x^2+x}dx = \int \frac{2x^2+3}{x(x^2-2x+1)}dx =$

$= \int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}dx = (*)$

Partialbråksuppdela:

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} \overset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}$$

Vi identifierar:

$$\begin{cases} A+B = 2 & (1) \\ -2A-B+C = 0 & (2) \\ A = 3 & (3) \end{cases}$$

Använd (3) i (1): $3+B=2 \Leftrightarrow B=-1$ (4).

Använd (3) och (4) i (2):

$$-2\cdot 3-(-1)+C=0 \Leftrightarrow -6+1+C=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C = 6-1 = 5$$

$$\Longrightarrow (*) = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx =$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{5}{x-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

c) $$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1+4x^2)^{3/2}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(1+(2x)^2)^{3/2}} =$$

$$= \left[\begin{cases} 2x = \tan\theta \\ 2dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}+n_1\pi \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}+n_2\pi \end{cases} \right] =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}+n_2\pi}^{-\frac{\pi}{4}+n_1\pi} \frac{\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}} = [\text{Välj } n_1=n_2=0] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)^{3/2}} = \left[1+\tan^2\theta = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \text{ (trigettan)} \right]$$

4

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2\theta\,(1/\cos^2\theta)^{3/2}} = [\cos\theta > 0] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2\theta/\cos^3\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{2}} = 1/\sqrt{2} \qquad (\approx 0.707)$$

---

3. $$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^{4/5}} = [\text{Integrand obegr. i } x=0] =$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^{4/5}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{4/5}} =$$

$$= \lim_{b\to 0_-} \int_{-2}^{b} \frac{dx}{x^{4/5}} + \lim_{a\to 0_+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{x^{4/5}} =$$

$$= \lim_{b\to 0_-} \left(\frac{1}{-\frac{4}{5}+1} x^{-\frac{4}{5}+1}\right)\Big|_{-2}^{b} + \lim_{a\to 0_+} \left(\frac{1}{-\frac{4}{5}+1} x^{-\frac{4}{5}+1}\right)\Big|_{a}^{1} =$$

$$= \lim_{b\to 0_-} (5x^{1/5})\Big|_{-2}^{b} + \lim_{a\to 0_+} (5x^{1/5})\Big|_{a}^{1} =$$

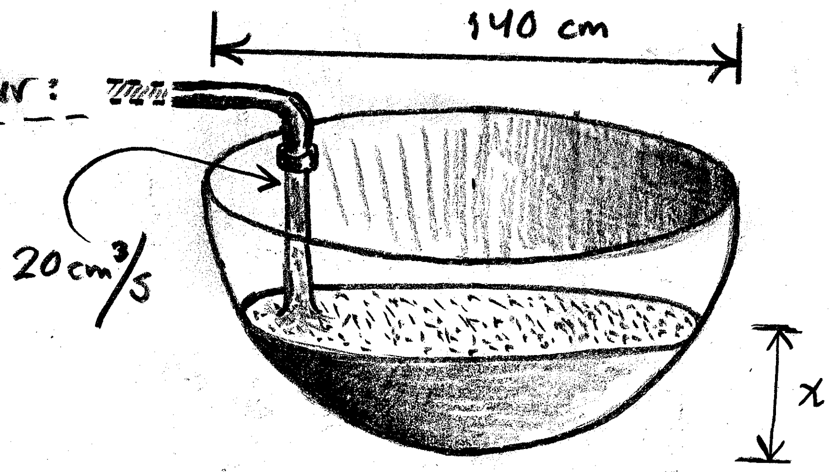
$$= 5\left(\lim_{b\to 0_-} b^{1/5} - (-2)^{1/5}\right) +$$

$$+ 5\left(1 - \lim_{a\to 0_+} a^{1/5}\right) =$$

$$= 5(0 + 2^{1/5}) + 5(1-0) =$$

$$= 5(2^{1/5} + 1) \qquad (\approx 10.7)$$

4. Figur:



Vattendjup x, radie $r = \frac{140 \text{ cm}}{2} = 70$ cm

$\Longrightarrow$ Vattenvolym $V = \pi r x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 =$

$$= 70\pi x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 \quad (*)$$

Vet att $\frac{dV}{dt} = 20$ cm³/s. Derivera nu (*) m.a.p. t:

$$\frac{dV}{dt} = 70\pi \cdot 2x\frac{dx}{dt} - \frac{1}{3}\pi \cdot 3x^2\frac{dx}{dt} =$$

$$= 140\pi x\frac{dx}{dt} - \pi x^2\frac{dx}{dt} =$$

$$= (140 - x)\pi x\frac{dx}{dt}$$

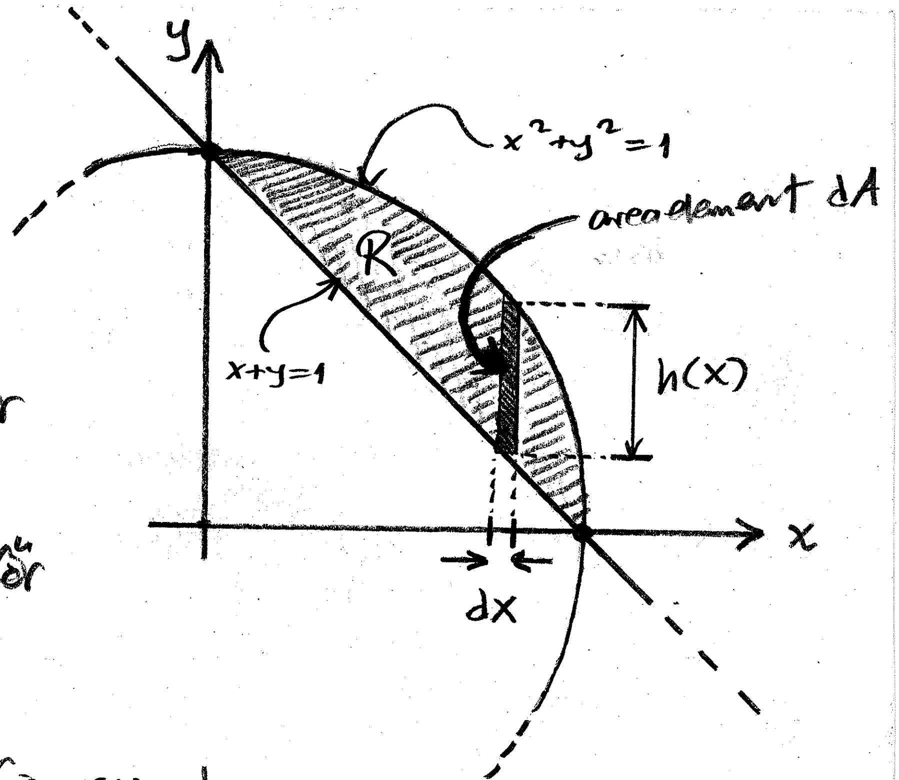
$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{(140-x)\pi x} = \text{[Stoppa in värden]} =$$

$$= \frac{20}{(140-35)\pi \cdot 35} = \frac{20}{105 \cdot 35\pi} =$$

$$= \frac{4}{21 \cdot 35\pi} = \frac{4}{735\pi} \text{ cm/s} \quad (\approx 0.0017 \text{ cm/s})$$

6

5. Figur:



P.g.a symmetri måste $\bar{y}=\bar{x}$ för centroiden $(\bar{x},\bar{y})$. Vi beräknar därför endast $\bar{x}$.

Areaelementet i figuren har höjden h(x). Vi har:

$$x^2+y^2=1$$
$$\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$$

och

$$x+y=1$$
$$\Rightarrow y=1-x$$

Vilket ger $h(x)=\sqrt{1-x^2}-(1-x)=$

$$=\sqrt{1-x^2}+x-1, \quad x\in[0,1].$$

$$\Longrightarrow dm=\underbrace{1}_{\text{densitet (ty centroid)}}\cdot dA=dA=h(x)\,dx=$$

$$=\left(\sqrt{1-x^2}+x-1\right)dx$$

Detta ger ett momentelement kring $x=0$ om

$$dM_{x=0}=x\,dm=x\left(\sqrt{1-x^2}+x-1\right)dx=$$

$$=\left(x\sqrt{1-x^2}+x^2-x\right)dx$$

Detta ger

$$m = \int dm = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} + x - 1\right) dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx}_{\text{arean av kvarts-cirkel m. radie 1}} + \int_0^1 (x-1)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$M_{x=0} = \int dM_{x=0} = \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + x^2 - x\right) dx =$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx + \int_0^1 (x^2 - x)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{3}\left((1-1^2)^{3/2} - (1-0^2)^{3/2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{3}(0-1) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{1/6}{\pi/4 - 1/2} = \frac{4}{6(\pi-2)} =$$

$$= \frac{2}{3(\pi-2)} \qquad (\approx 0.58)$$

$\Rightarrow$ Centroiden är $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2}{3(\pi-2)}, \frac{2}{3(\pi-2)}\right)$.

6.

$$\ln 11 - \ln 10 = \ln \frac{11}{10} = \ln\left(1+\frac{1}{10}\right) =$$

$$= [\text{Maclaurinserieutveckling}] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{10}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\frac{1}{100} + \frac{1}{3}\frac{1}{1000} - \frac{1}{4}\frac{1}{10000} + \dots$$

Fyra decimalers noggrannhet innebär ett fel mindre än $\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$. Vi ser att serien är alternerande vilket innebär att felet till sin ~~storlek~~ vid trunkering är högst lika stor som första uteslutna termen. Vi ser att $\left|-\frac{1}{4}\frac{1}{10000}\right| = \frac{1}{4}\cdot 10^{-4} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$,

så vi kan ta de tre första termerna:

$$\ln 11 - \ln 10 \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\frac{1}{100} + \frac{1}{3}\frac{1}{1000} =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} = \frac{300-15+1}{3000} =$$

$$= \frac{286}{3000} = \frac{143}{1500} = 0.09533333\dots$$

(korrekt till fjärde decimalen).

(Notera: Exakt svar: 0.0953101798...)

7. Vi noterar först att

$$\sum_{l=1}^{k} l = 1+2+3+\cdots+(k-1)+k =$$
$$= \frac{1}{2}k(k+1)$$

(ty $\quad 1+2+\cdots+k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & +\ 2 & +\cdots+ & k \\ +\ k & +\ k-1 & +\cdots+ & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}\big(\underbrace{(k+1)+\cdots+(k+1)}_{k \text{ termer}}\big) =$$
$$= \frac{1}{2}k(k+1)$$

Alltså kan påståendet skrivas:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)^{-1} = \frac{2n}{n+1}$$

d.v.s. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2n}{n+1}$,

så att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Låt $\displaystyle VL_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\displaystyle HL_n = \frac{n}{n+1}$.

Ska visa $VL_n = HL_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

- **Startsteg:** (n=1) $\begin{cases} VL_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2} \\ HL_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

d.v.s. $VL_1 = \frac{1}{2} = HL_1$, startsteg verifierat.

- **Induktionssteg:** Ska visa implikationen

$$\underbrace{VL_p = HL_p}_{\text{induktionsantagande}} \Rightarrow VL_{p+1} = HL_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+$$

Antag därför $VL_p = HL_p$. Då fås:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \underbrace{\frac{1}{(p+1)(p+2)}}_{\text{term } k=p+1} =$$

$$= VL_p + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = [\text{Ind.ant.}] =$$

$$= HL_p + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2} =$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)+1} = HL_{p+1},$$

d.v.s. induktionsteget verifierat.

Induktionsprincipen ger att $VL_n = HL_n \ \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

---

8. a) $$xy' - 2y = x^3 e^{x^5}$$

$$y' - \frac{2}{x} y = x^2 e^{x^5}$$

Multiplicera med integrerande faktor e^{u}

där $\mu = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{\mu} = e^{2\ln|x|} = |x|^2 = x^2$$

Detta ger:

$$x^2y' - 2xy = x^4e^{x^5}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = x^4e^{x^5}$$

$$x^2y = \int x^4e^{x^5}dx =$$

$$= \frac{1}{5}e^{x^5} + C$$

$$y = \frac{1}{5x^2}e^{x^5} + \frac{C}{x^2}$$

b) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0 \quad (x > 0)$

Vi ser att detta är en Eulerekvation.

$$\left(\text{ty} \quad x^2\frac{dy^2}{dx^2} + 3x^1\frac{dy^1}{dx^1} + 5x^0\frac{dy^0}{dx^0} = 0 \right)$$

Karaktäristisk ekvation:

$$r(r-1) + 3r + 5 = 0$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

Då måste den allmänna lösningen vara

$$y = C_1|x|^{-1}\cos(2\ln|x|) + C_2|x|^{-1}\sin(2\ln|x|) =$$

$$= \frac{C_1}{x}\cos(2\ln x) + \frac{C_2}{x}\sin(2\ln x)$$

A. Se Föreläsning 9 s. 10ff.