

①

Föreläsning 1Reella tal

Tal som kan skrivas
på decimalform, t.ex.

$$7 = 7.0000\dots$$

$$-4/5 = -0.8000\dots$$

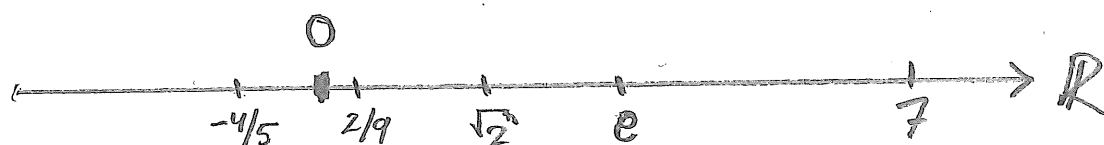
$$2/9 = 0.2222\dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\dots$$

$$e = 2.7182\dots$$

Beteckning: $\mathbb{R}$ (reell)

Kan representeras geometriskt:



En s.k. tallinje.

Några delmängder av $\mathbb{R}$:

• Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (naturlig)

• Heltal: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (Zahl)

• Rationella tal: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ men } n \neq 0 \right\}$
(Quotiens)

- Irrationella tal: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (icke-kvoter) ②

Skrivsätt för rationella tal:

- Avslutat decimalbråk: $\frac{1}{8} = 0.125000... = 0.125$

- Periodiskt decimalbråk: $\frac{17}{99} = 0.171717... = 0.\overline{17}$

Konvertera från decimalform till kvotform:

$1.35135135135...$ är rationellt
(och kan skrivas $1.35\overline{135}$)

$$x = 1.35135135...$$

$$\Rightarrow 1000x = 1351.35135...$$

$$\Rightarrow 1000x - x = 1351.35135... - 1.35135... = 1350$$

$$\Rightarrow 999x = 1350$$

$$x = \frac{1350}{999} = \frac{50 \cdot 27}{37 \cdot 27} = \frac{50}{37}$$



Intervall: Delmängd av $\mathbb{R}$ som innehåller minst två tal och som innehåller alla reella tal mellan vilka par av element som helst.

③

Det finns tre typer av ändliga intervall:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{öppet}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{halvöppna}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{halvöppna}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{slutet}$$

Dessutom oändliga intervall:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{öppna}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{öppna}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{slutna}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{slutna}$$

Olikheter: Vill lösa t.ex. olikheten

$$\frac{4}{x+1} \leq 3$$

Lösning:

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 3(x+1)}{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 3x}{x+1} \leq 0$$

Sätt upp teckentabell:

x	-1	1/3
1-3x	++++++0----->	
x+1	---0++++++	
(1-3x)/(x+1)	--- $\frac{2}{3}$ ++++0-----	

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$



Notera: $\cup$ kallas "union", d.v.s. ovan betyder att $x \in (-\infty, -1)$ eller $x \in [0, \infty)$.

Dessutom: $\cap$ "snitt", d.v.s.

$x \in I_1 \cap I_2$ betyder att $x \in I_1$ och $x \in I_2$

(T.ex. $(0, 2) \cap (1, 3) = (1, 2)$.)

Absolutbelopp: Def. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Exempel: Lös $|5x + 2| \leq 3$

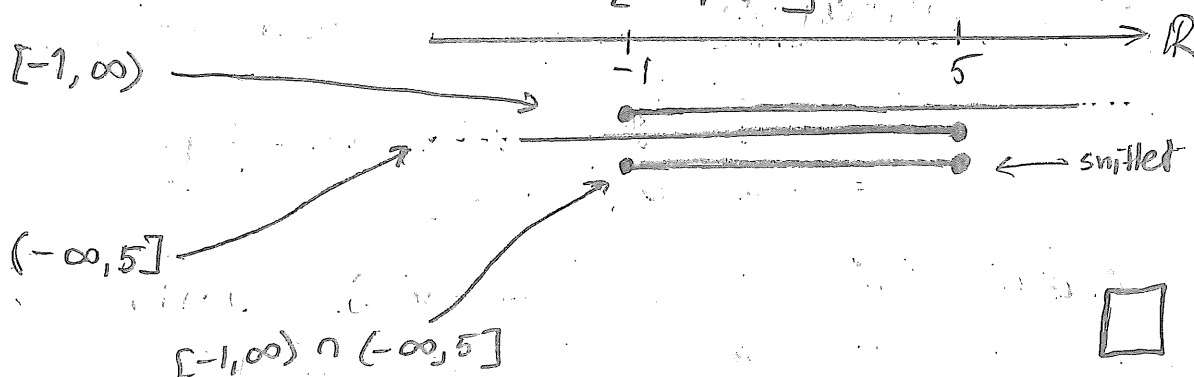
Man får: $-3 \leq 5x + 2 \leq 3$

$$-3 \leq 5x + 2 \quad \text{och} \quad 5x + 2 \leq 3$$

$$-5 \leq 5x \quad \text{och} \quad 5x \leq 1$$

$$-1 \leq x \quad \text{och} \quad x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, \infty) \cap (-\infty, 5] = [-1, 5]$$



⑤ Fullständighet Terminologi enligt:

Definition: Låt S icke-tom delmängd av $\mathbb{R}$.

- u övre begränsning till S om
 $x \leq u$ för alla $x \in S$
- u^* minsta övre begränsning till S om
 $u^* \leq u$ för alla övre begränsningar
 u till S (u^* övre begr.)
- l undre begränsning till S om
 $l \leq x$ för alla $x \in S$
- l^* största undre begränsning till S
om $l \leq l^*$ för alla undre
begränsningar l till S (l^* undre begr.)

u^* : supremum till S , $\sup S$

l^* : infimum till S , $\inf S$

Fullständighebsaxiomet Antag S icke-tom delmängd av $\mathbb{R}$

Dd: Om S har övre begränsning
så existerar $\sup S$

(kallas även "Axiomet om minsta övre begränsning",
men håller ekvivalent även för inf.)

Axiomet garanterar att den reella tallinjen saknar "hål". ⑥

Notera: Ett axiom är en sats som helt enkelt accepteras som sanning.

Funktionsgränsvärden

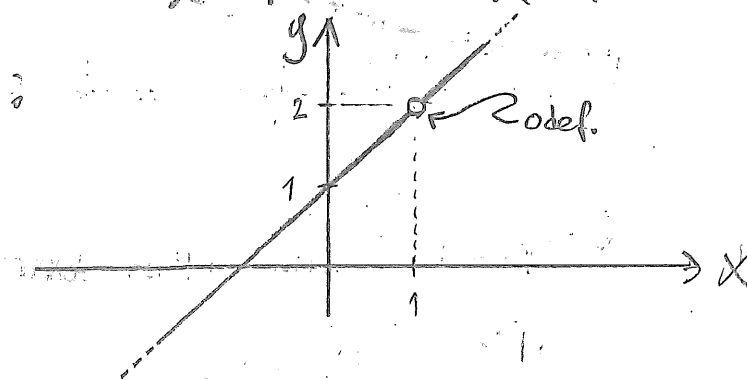
Betrakta $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Kan ej

dividera med 0 så f odef. för $x=1$.

Vad händer nära $x=1$?

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

Rita grafen:



Då x närmar sig 1 så närmar sig $f(x)$ värdet 2. Man säger att $f(x)$ har gränsvärdet 2 då x går mot 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad (*)$$

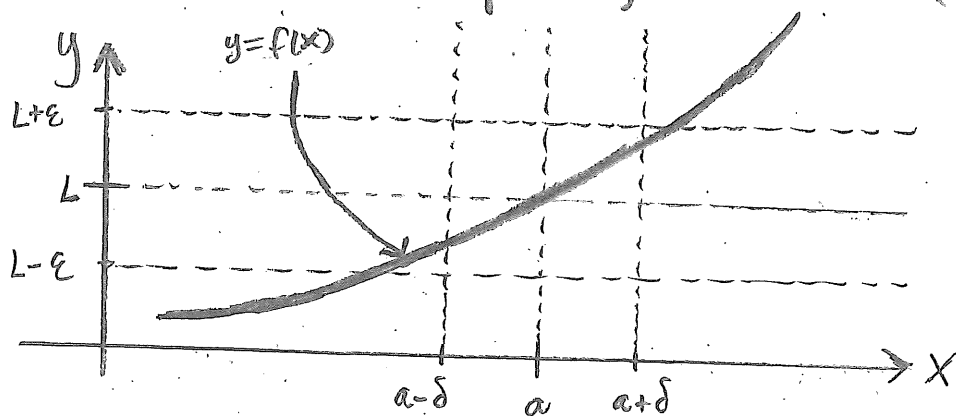
⑦ Formell definition: Vi säger att $f(x)$ går mot gränsen L då x går mot a , skrivet

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Om följande uppfylls:

För varje $\varepsilon > 0$ så finns $\delta > 0$ sådant att om $0 < |x - a| < \delta$ så gäller $|f(x) - L| < \varepsilon$.

OBS: δ kan bero på ε , d.v.s. $\delta = \delta(\varepsilon)$



Exempel: Verifiera m.h.a. definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad (\text{d.v.s. } (*))$$

Lösning: Här: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{x \neq 1}{=} x + 1$, $a = 1$, $L = 2$

$$\Rightarrow |f(x) - L| = |(x + 1) - 2| = |x - 1|$$

Vill få detta $< \varepsilon$

$$\text{Men } |x - a| = |x - 1|$$

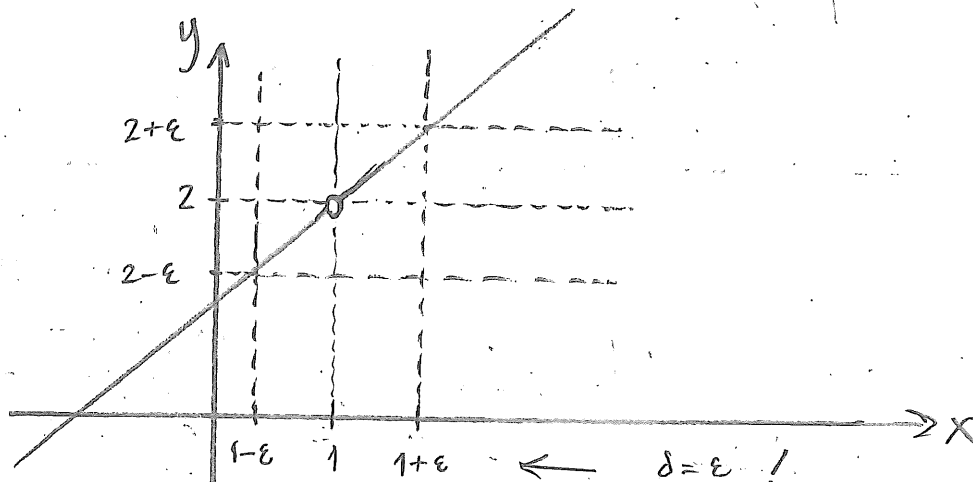
Om $\delta = \varepsilon$ väljs (t.ex.) så

gäller: uppenbarligen

$$0 < |x-1| < \delta (= \epsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{x+1} - 2 \right| < \epsilon$$

vilket innebär $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x+1} = 2$



Svårare exempel:

Visa $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

Lösning: I detta fall två metoder:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |f(x) - L| &= |x^2 - 1| = |(x+1)(x-1)| = \\ &= |(x-1) + 2| |x-1| \leq [\text{Triangelolikhet}] \\ &= (|x-1| + |2|) |x-1| = \\ &= |x-1|^2 + 2|x-1| \end{aligned}$$

Detta är $< \epsilon$ om $0 < |x-1| < \delta$
där δ väljs t.ex. så att

$$\delta^2 + 2\delta = \epsilon$$

$$\delta^2 + 2\delta - \epsilon = 0$$

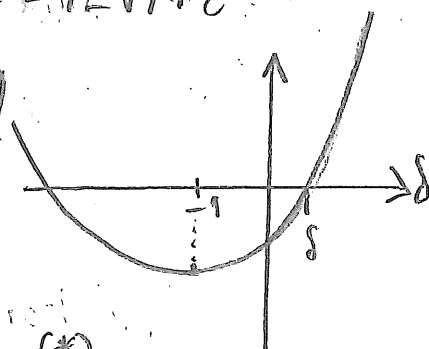
Lös

$$\delta^2 + 2\delta - \epsilon = 0$$

9

$$\delta = -1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (-\epsilon)} = -1 \pm \sqrt{1+\epsilon}$$

Positiv lösning: $\delta = \sqrt{\epsilon+1} - 1$



② $|f(x) - L| = \dots = (|x-1|+2)|x-1|$

Antag först att $\delta \leq 1$

(*)

$$\Rightarrow |x-1|+2 < \delta+2 \leq 1+2 = 3$$

$$\Rightarrow |f(x) - L| < 3|x-1| \quad (**)$$

Detta $< \epsilon$ önskas. Välj nu

$$\delta = \min \{1, \epsilon/3\}$$

(1 p.g.a. (*),
 $\epsilon/3$ p.g.a. (**))

$$\Rightarrow |f(x) - L| < 3 \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$



Högergränsvärde: Vi säger att $f(x)$ har högergränsvärde L i $x=a$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$$

om följande uppfylls:

För varje $\epsilon > 0$ så finns $\delta > 0$ sådant att om $a < x < a+\delta$ så gäller $|f(x) - L| < \epsilon$

(Motsträrande definition för vänstergränsvärde.)

Gränsvärde i oändligheten: Vi säger att $f(x)$ går mot gränsen L då x går mot ∞ ,

skrivet.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

om följande uppfylls:

För varje $\varepsilon > 0$ så finns $R > 0$

sådant att om $x > R$ så gäller

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

(Motsvarande för gränsvärde i $-\infty$)

Oändliga gränsvärden: Vi säger att $f(x)$ går mot ∞ då x går mot a , skrivet

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

om följande uppfylls:

För varje $B > 0$ så finns $\delta > 0$

sådant att om $0 < |x - a| < \delta$

så gäller $f(x) > B$

(Motsvarande för $-\infty$ gränsvärden.)

Några gränsvärdesatser:

Sats: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$

Sats: Antag $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = M$
Då gäller följande:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$
(om $f(x) = k$ så fås gräns kM)
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ om $M \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{m/n} = L^{m/n}$ där $L > 0$
om n jämn, $L \neq 0$ om $m < 0$
- Om $f(x) \leq g(x)$ på intervall innehållande a (ej ändpunkt) så $L \leq M$

(Motsträande gäller även för höger- och vänstergränsvärden)

Sats:

- Om $P(x)$ polynom och $a \in \mathbb{R}$
så gäller $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$

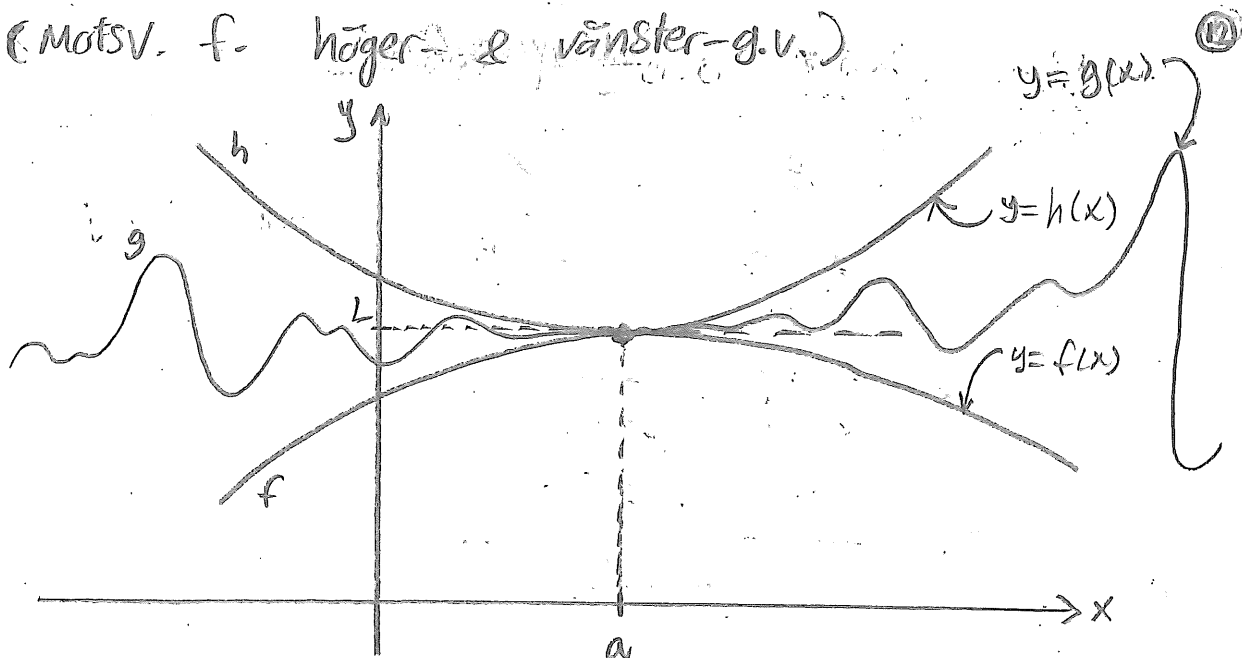
- Om $P(x), Q(x)$ polynom där $Q(a) \neq 0$
så gäller $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$
(motstr. f. höger- & vänster-g.v.)

Insättningsatsen: Antag $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ för alla x i ett öppet intervall innehållande a (utan möjligen a självt), samt antag att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

Då gäller också $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

(Motsv. f. höger- & vänster-g.v.)



Exempel: Antag $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$.

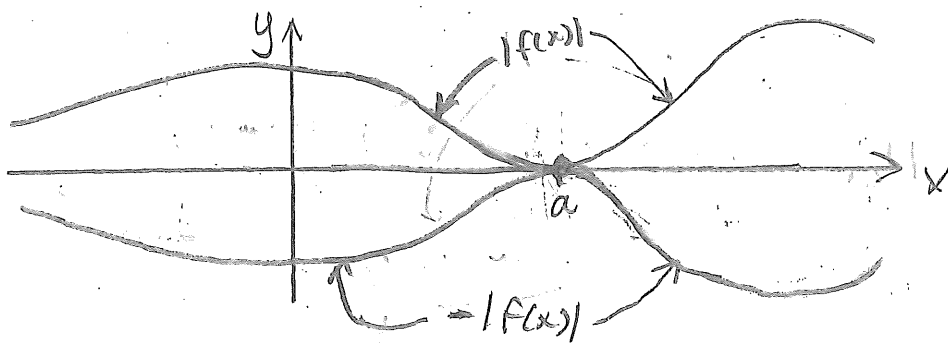
Visa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Lösning: Vi har $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Eftersom $\lim_{x \rightarrow a} (-|f(x)|) = -\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$

och $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$

så ger instängningsatsen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ $\square$



$f(x)$:



Alt 1



Alt 2



Alt 3



Alt 4

13

Några jämna övningsuppgifter

P. 1:26

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$

Ska lösas

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} < 0$$

Teckentabell:

x	-5	-1	1
x+5	-----0+++++		
x+1	-----0+++++		
x-1	-----0++++		
$\frac{(x+5)}{(x-1)(x+1)}$	-----0++++ $\frac{1}{2}$ ----- $\frac{1}{2}$ ++++		

d.v.s.

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$$



1.5:8

Vill ha implikationen

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

$$\text{Här: } |x-3| < \delta \Rightarrow |\sqrt{2x+3}-3| < 0.01$$

$$= 0.01 < \sqrt{2x+3}-3 < 0.01$$

$$2.99 < \sqrt{2x+3} < 3.01$$

$$8.9401 < 2x+3 < 9.0601$$

$$-0.0599 < 2x-6 < 0.0601$$

$$-0.02995 < x-3 < 0.03005$$

Detta uppfylls om $-0.02995 < x-3 < 0.02995$ (14)

$$\Leftrightarrow |x-3| < 0.02995$$

Vi väljer därför $\boxed{\delta = 0.02995}$

(Vilket $0 < \delta \leq 0.02995$ som helst funkar.)



1.5:20

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$$

Visa: $|x-2| < \delta \Rightarrow |x^3-8| < \varepsilon$

Måste faktorisera ut $x-2$ ur x^3-8 .

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^2+2x+4 \\ x^3-8 \quad \overline{) \quad} \quad x-2 \\ -x^2(x-2) \\ \hline 2x^2-8 \\ -2x(x-2) \\ \hline 4x-8 \\ -4(x-2) \\ \hline 0 \end{array}$$

← jämnt ut!
(ingen rest)

$$\Rightarrow x^3-8 = (x^2+2x+4)(x-2)$$

$$|x^3-8| = |x^2+2x+4||x-2| =$$

$$= |(x-2)^2+6x||x-2| =$$

$$= |(x-2)^2+6(x-2)+12||x-2| \leq$$

$$\leq (|x-2|^2+6|x-2|+12)|x-2|$$

Välj $\delta \leq 1 \Rightarrow |x-2| < \delta$ implicerar

$$|x-2|^2+6|x-2|+12 < 1+6+12 = 19$$

Triangel-
olikh.

15

d.v.s. $|x^2 - 8| < 19|x - 2|$

Välj $\delta = \min \{1, \varepsilon/19\}$, då är

$$|x^2 - 8| < 19 \frac{\varepsilon}{19} = \varepsilon$$



(Notera: Om $\delta = 1$, d.v.s. $1 \leq \varepsilon/19 \Rightarrow \varepsilon \geq 19$
 så gäller $|x^2 - 8| < 19 \cdot 1 = 19 = \varepsilon$,
 funkar alltså.)

1.2:30 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

Faktorisera ut $x + 1$ ur $x^3 + 1$:

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ \overline{) x^3 + 1} \\ \underline{-x^2(x+1)} \\ -x^2 + 1 \\ \underline{-(-x)(x+1)} \\ x + 1 \\ \underline{-1 \cdot (x+1)} \\ 0 \end{array}$$

← jämnt ut!
 (ingen rest)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x + 1)(x + 1)}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$$



1.2:74 $\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5 - 2x^2} = \sqrt{5 - 2 \cdot 0^2} = \sqrt{5}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{5 - x^2} = \sqrt{5 - 0^2} = \sqrt{5}$

Enligt mätningssatsen får nu att ⑩
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$ □

1.3:28 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3 - x^2}{x^2 - 1} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 1} = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - x^2} =$$
$$= -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2 - 1)/x^2} =$$
$$= -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 1/x^2} =$$
$$= -2 \frac{1}{1 - 0} = \underline{\underline{-2}} \quad \square$$

se även RÖ 1 & 2 HT09 där jag löst bl.a.

1.5:18, 1.5:18, 1.5:24, 1.5:28,

1.2:36, 1.2:58, 1.3:16:

(+ några till som inte rekommenderats
i denna kurs men relevanta ändå)