1

Föreläsning 10

Oändliga serier (eller helt enkelt "serie")

En (oändlig) serie är summa med oändligt antal termer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \qquad (*)$$

(Kan börja vid vilket index som helst, inte bara $n=1$.)

I princip beror resultatet i (*) på i vilken ordning man summerar termerna. En entydig ordning är följande.

Inför $\{s_n\}$, den s.k. delsummeföljden av delsummor:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$

Så att $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Varje term i följden är väldefinierad.

Definition: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sägs konvergera mot S, d.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, om

$\lim_{n\to\infty} s_n = S$ där s_n är den n:te delsumman till $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enligt ovan.

Serien divergerar i annat fall (div. mot $-\infty$, div. mot ∞ eller helt enkelt divergerar).

Geometriska serier:

En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n = ar^{n-1}$ kallas för en <u>geometrisk serie</u>. Utveckla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

Talet r kallas för seriens <u>kvot</u> ty

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^{(n-1)+1}}{ar^{n-1}} = r$$

d.v.s. faktor med vilken termerna ökar i varje steg.

Vi vet att n:te delsumman är

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} ar^{j-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

(Följer ur (d) i satsen på sid. 2 i Föreläsning 2.)

<u>Sats:</u> För den geometriska serien gäller att

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{konv. mot } 0 & \text{om } a=0 & (1) \\ \text{konv. mot } \frac{a}{1-r} & \text{om } |r|<1 & (2) \\ \text{div. mot } \infty & \text{om } r \geq 1, a>0 & (3) \\ \text{div. mot } -\infty & \text{om } r \geq 1, a<0 & (4) \\ \text{divergerar} & \text{om } r \leq -1, a \neq 0 & (5) \end{cases}$$

③ <u>Bevis:</u> <u>(1):</u> Uppenbart ty $s_n = 0 \ \forall n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

<u>(2):</u> $|r|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

<u>(3):</u> $r>1 \Rightarrow \lim_{n\to} r^n = \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \quad \text{ty } a>0$$

$r=1 \Rightarrow a_n = a \ \forall n \Rightarrow s_n = na$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \quad \text{ty } a>0$$

<u>(4):</u> Som (3) men $a<0$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

<u>(5):</u> $r \leq -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n$ finns ej (alternerande)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \text{ finns ej,}$$

d.v.s. divergent. $\square$

<u>Exempel:</u> $0.\overline{3} = 0.3333\ldots =$ [Per definition] $=$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots =$$

$$= \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^1 + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left[\begin{cases} a = 3/10 \\ r = 1/10 \end{cases}\right] =$$

i satsen

$$\overset{(2)}{=} \frac{3/10}{1-1/10} = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}} \ \square$$

(Notera: Alt. till metoden i Föreläsning 1 sid. 2.)

<u>Teleskopserier</u>: Betrakta följande serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

Partialbråksuppdela $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$:

$$\frac{1}{n(n+1)} \overset{\text{ansätt}}{=} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$= \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

Identifiera: $\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots + 0 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + 0 = 1$$

d.v.s. serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergerar och är 1.

Notera att detta är en s.k. <u>teleskopserie</u> eftersom alla utom första och sista termen i S_n togs ut.

5

Harmoniska serien: Betrakta följande serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

Denna kallas för den harmoniska serien. Konvergent?

n:te delsumman ges av:

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

= arean av rektangel med bas 1 och höjd 1 +

+ ———— " ———— 1/2 +

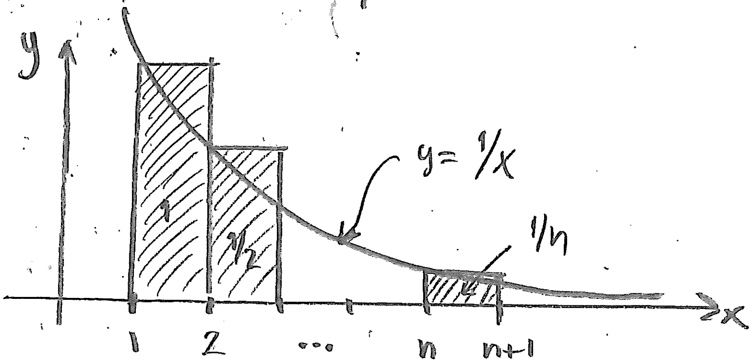
+ ———— " ———— 1/3 +

+ ... + ———— " ———— 1/n >

> arean under $y=\frac{1}{x}$ mellan $x=1$ och $x=n+1$

$$= \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} = (\ln|x|)\Big|_1^{n+1} = \ln(n+1),$$

se figur:



$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ ty $s_n > \ln(n+1)$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ divergerar mot oändligheten}}$$

Harmoniska serien är alltså divergent.

Låt oss formulera några satser utan att ge bevis för alla:

Sats: (Termkonvergenskriteriet)

Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bevis: $S_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}$, $S_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\underset{\text{per def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} S_n = S$ finns $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) =$

$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} =$

$= S - S = 0$ $\square$

Notera: Om inte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ så är alltså $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Sats: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerar $\forall N \geq 1$

(säger att för konvergensen är bara svansen viktig.)

Sats: Om $\{a_n\}$ slutligen växande så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ antingen konvergent eller divergent mot ∞
(delsummor uppåt begr.) (delsummor ej uppåt begr.)

Sats: Antag $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar mot A resp. B.

Då gäller: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konv. mot cA (c = konst.)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ konv. mot $A \pm B$

(c) $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \leq B$

⑦ <u>Konvergenstest för positiva serier</u>

<u>Positiv serie:</u> Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Konvergenstester som kommer gäller även för slutligen positiva serier (endast svansen hos serien bestämmer konvergens).

Konvergenstest i de specifika fallen kallas <u>kriterier</u> på svenska.

<u>Integralkriteriet:</u> Antag $a_n = f(n)$ där f positiv, kontinuerlig och icke-växande på $[N, \infty)$ för något $N \in \mathbb{N}$. Då gäller att

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ båda antingen

konvergerar eller divergerar mot ∞.

(Visas p.s.s. som för harmoniska seriens divergens mot ∞ på sid. 5.)

En konsekvens av Integralkriteriet är:

<u>(p-serier)</u>
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergerar om } p > 1 \\ \text{div. mot } \infty \text{ om } p \leq 1 \end{cases}$$

(<u>Notera:</u> Harmoniska serien är en p-serie för $p = 1$.)

<u>OBS:</u> Hoppa över avsnittet "Using Integral Bounds to Estimate the Sum of a Series" i boken.

Jämförelsekriterier: Man kan avgöra konvergens hos en serie genom att jämföra med andra serier med känd konvergens/divergens.

Jämförelsekriterium #1: Låt $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ vara följder sådana att det finns $K>0$ s.a.
$0 \leq a_n \leq K b_n$. Då gäller:

(a). $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot $\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ konvergerar.

Lösning:
$$a_n = \frac{3n+1}{n^3+1} < \frac{3n+1}{n^3} \leq \frac{3n+n}{n^3} = \frac{4n}{n^3} = 4\frac{1}{n^2}$$

Här är alltså $K=4$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. Vet att $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konvergerar
(en p-serie med $p=2>1$)

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ konvergerar enligt jämförelsekriteriet. $\square$

Notera: $\frac{3n+1}{n^3+1} \approx \frac{3}{n^2}$ för stora n antyder att vi ska jämföra med just $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

9. **Jämförelsekriterium #2:** Antag $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är positiva serier för vilka $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ där $L \geq 0$ eller $L = +\infty$. Då gäller:

(a) $L < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $L > 0$ eller $L = +\infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot ∞

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞

(Detta jämförelsekriterium är ofta mer behändigt än Jämförelsekriterium #2.)

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-2n+3}$ konvergerar

Lösning: $a_n = \frac{n+5}{n^3-2n+3} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ för stora n.

$\Rightarrow$ Jämför med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n = 1/n^2$ som konvergerar.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+5}{n^3-2n+3}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n^2}{n^3-2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5/n}{1-2/n^2+3/n^3} =$$

$$= \frac{1+0}{1-0+0} = 1 < \infty$$

$\Rightarrow$ Serien konvergerar enligt Jämf.-krit. #2. $\square$

Kvotkriteriet: Antag $a_n > 0$ och att $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existerar eller är $+\infty$. Då gäller:

(a) $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $1 < \rho \leq \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ så att alltså $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞

(c) $\rho = 1$: Ingen information ur detta test, kan ha konvergens eller divergens

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ divergerar mot ∞

Lösning: $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, då blir ρ:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!/((n+1)!)^2}{(2n)!/(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2n+1) \cdot 2(n+1) \frac{1}{(n+1)^2} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{1+1/n} =$$

$$= 2 \, \frac{2+0}{1+0} = 4 > 1$$

$\underset{(b)}{\Longrightarrow}$ Serien **divergerar mot ∞** $\square$

(11) **Rotkriteriet:** Antag $a_n \geq 0$ och $\sigma = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ existerar eller är $+\infty$. Då gäller:

(a) $0 \leq \sigma < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(b) $1 < \sigma \leq \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ så att alltså $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot ∞

Exempel: Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)^n}$ konvergerar

Lösning: $a_n = \frac{3^{n-1}}{(n+1)^n}$, då blir σ:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n-1}}{(n+1)^n}\right)^{1/n} = \ldots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{1-1/n}}{n+1} = 3\left(\lim_{n\to\infty} 3^{-1/n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 3 \cdot 3^{-0} \cdot 0 = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$\overset{}{\underset{(a)}{\Longrightarrow}}$ Serien konvergerar $\square$

Notera: (1) Rotkriteriet är inte lika användbart som kvotkriteriet.

(2) Alla konvergenstest fungerar även för serier som uppfyller antagandena endast från och med N:te termen, d.v.s. att svansen $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ uppfyller antagandena. (För vilket $N \in \mathbb{N}$ som helst.)

Några jämna uppgifter

9.2:6

Beräkna summan av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$.

Lösning:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1/e)^n = [m=n+1] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (1/e)^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} 1\cdot(1/e)^{m-1} =$$

$$= [\text{Geometrisk serie}] =$$

$$= \frac{1}{1-1/e} = \boxed{\frac{e}{e-1}}$$

9.2:20

Beräkna summan av serien

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$$

Lösning:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i} = [\text{Standardsumma}] = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= [\text{Teleskopserien på sid. 4}] =$$

$$= 2\cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

9.3:8

Konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)}$?

Lösning: $x > \ln x$ för $\forall x > 0 \Rightarrow 3n > \ln(3n)$, $\forall \in \mathbb{N}$

13

$$\Rightarrow \frac{1}{3n} < \frac{1}{\ln(3n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < 3\,\frac{1}{\ln(3n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Enligt Jämförelsekriterium #1 (b) med $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{\ln(3n)}$ och $K=3$ så divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(3n)}$ mot ∞ ty den harmoniska serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar mot ∞.

$\boxed{\text{Serien divergerar mot } \infty.}$

9.3:14

Konvergerar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\,(\ln \ln n)^2}$?

Lösning: Använd Integralkriteriet!

Låt $f(t) = \frac{1}{t \ln t\,(\ln \ln t)^2}$. Det spelar ingen roll vad vi integrerar från så länge f är positiv, kontinuerlig och icke-växande på intervallet. Vi har $(N \in \mathbb{N})$:

$$\int_N^{\infty} \frac{dt}{t \ln t\,(\ln \ln t)^2} = \left[\begin{cases} u = \ln \ln t \\ du = \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t}\,dt \end{cases} , \begin{cases} t \to \infty \Rightarrow u \to \infty \\ t = N \Rightarrow \\ \Rightarrow u = \ln \ln N \end{cases} \right] =$$

$$= \int_{\ln \ln N}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim_{R \to \infty} \int_{\ln \ln N}^{R} \frac{du}{u^2} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_{\ln\ln N}^{R} = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\ln N} - \frac{1}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln\ln N} < \infty \Leftrightarrow N \geq 2$$

Eftersom f är pos., kont. och icke-växande på $[\overset{N=2}{2}, \infty)$ så ger Integralkriteriet att också serien konvergerar.

9.3:40 Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ konvergerar med hjälp av kvotkriteriet.

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{2^{n+1}}{n^n}$. Bilda ρ där

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}/(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}/n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ Enligt kvotkriteriet (a) har vi att serien konvergerar. $\square$

Se även RÖ 9&10 HT09 där jag löst bl.a.

9.2:8, 9.2:10, 9.2:14,

9.2:22, 9.3:26, 9.3:38