①

Föreläsning 11

Absolut och betingad konvergens

Vi släpper på kravet att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är (slutligen) positiv, d.v.s. $a_n \geq 0$ ($\forall n \geq N$ f.n. $N \in \mathbb{N}$).

Definition: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är <u>absolutkonvergent</u> om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

Sats: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutkonvergerar $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

Bevis: Antag $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent. (D.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv.)

Låt $b_n = a_n + |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \Rightarrow 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \underset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{(*)}{\Leftrightarrow} 0 \leq b_n \leq 2|a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent tack vare Jämförelsekriteriet #1 ($\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ konvergent).

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - |a_n|) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{konv.}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}_{\text{konv.}} \text{ Konvergent.} \quad \square$$

Notera: Det omvända är <u>inte</u> sant; konvergens ger <u>inte</u> absolutkonvergens!

(Motexempel: Den alternerande harmoniska serien $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$)

Definition: Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar men inte absolutkonvergerar så är den <u>betingat konvergent.</u>

(Exempel: Alternerande harmoniska serien.)

Exempel: Absolutkonvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi}{2^n}$?

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{n \cos n\pi}{2^n} = \frac{n \cdot (-1)^n}{2^n} = (-1)^n \frac{n}{2^n}$

Vill avgöra om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar.

Använd kvotkriteriet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \frac{n}{2^n}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{2^n}{2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} = (1+0)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar enl. kvotkrit.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ är absolutkonvergent}}$ $\square$

<u>Kriterium för alternerande serier:</u> (Leibniz' sats)

Antag $\{a_n\}$ är en talföljd som uppfyller

(i) $a_n a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (alternerande)

(ii) $|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (avtagande belopp)

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Då konvergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

③ <u>Exempel:</u> För vilka x gäller att den s.k. potens-serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$ absolutkonvergerar, konvergerar betingat och divergerar?

<u>Lösning:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$ (x-beroende)

* <u>Absolutkonvergens:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, använd kvotkriteriet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(x-5)^{n+1}/(n+1)\cdot 2^{n+1}\right|}{\left|(x-5)^n/n\cdot 2^n\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-5|^{n+1}}{|x-5|^n} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} |x-5| \frac{n}{n+1} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}|x-5| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{2}|x-5| \cdot \frac{1}{1+0} =$$

$$= \frac{|x-5|}{2}$$

$$\rho < 1 \Leftrightarrow \frac{|x-5|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3 < x < 7$ ger absolutkonvergens

$\rho > 1 \Leftrightarrow \frac{|x-5|}{2} > 1 \Leftrightarrow x < 3, x > 7$ ger ej absolutkonvergens

$x = 3$: $|a_n| = \left|\frac{(3-5)^n}{n \cdot 2^n}\right| = \frac{1}{n}$, ger ej abs.-konv.

$x = 7$: $|a_n| = \left|\frac{(7-5)^n}{n \cdot 2^n}\right| = \frac{1}{n}$, — " —

$\boxed{\text{Serien är absolutkonvergent för } x \in (3,7).}$

* <u>Betingat konvergent:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$, $x \le 3$ el. $x \ge 7$

• <u>$x < 3$:</u> $x - 5 < -2 \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{n} \underbrace{\left|\frac{x-5}{2}\right|}_{>1}^n \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej konvergent (divergent)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej betingat konvergent

• $\underline{x=3}$: $a_n = \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = (-1)^n \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent enl. Kriterium för alternerande serier

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ betingat konvergent

• $\underline{x=7}$: $a_n = \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej konvergent (div. mot ∞)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej betingat konvergen

• $\underline{x>7}$: $x-5>2 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\underbrace{\left(\frac{x-5}{2}\right)}_{>1}^{n} \to \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej konvergent (div. mot ∞)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ej betingat konvergent

$\boxed{\text{Serien är betingat konvergent för } x=3, \text{ divergerar mot } \infty \text{ för } x\geq 7 \text{ och diregent för } x<3.}$

Omordning av serie:

(a) Om termerna till en absolutkonvergent serie omordnas så att additionen utförs i en annan ordning så konvergerar den omordnade serien mot samma summa.

(b) Om termerna till en betingat konvergent serie omordnas så kan man hitta en

⑤

omordning så att den omordnade serien konvergerar mot vilken gräns L som helst, divergerar mot $-\infty$, divergerar mot $+\infty$, eller helt enkelt divergerar.

Man kan alltså säga att absolutkonvergenta serier i någon mening uppför sig som vanliga summor medan betingat konvergenta serier är väldigt beroende på exakt hur termerna läggs ihop.

(Läs gärna själva Example 7 på sid. 525 (i uppl. 6 sid. 500ff) där man visar att den alternerande harmoniska serien kan omordnas så att den blir 8 istf. (vilket kan visas) $\ln 2$.)

Klassificering av differentialekvationer

Vi bryr oss endast om s.k. ordinära differentialekvationer (ODE) i den här kursen.

ODE:er har endast derivator m.a.p. en variabel. (Partiella differentialekvationer, PDE, involverar derivator m.a.p. fler än en variabel.)

Ordningen hos en DE: Ordningen hos den högsta ordningens derivata som involveras.

Exempel:
$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{d^2y}{dx^2} + e^y$$

har ordning 3 (p.g.a. $\frac{d^3y}{dx^3}$-termen)

⑥

Varje n:te ordningens ODE kan skrivas

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

för någon funktion F.

En <u>linjär</u> ODE är en ODE som kan skrivas

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

Termen som ej innehåller $y^{(i)}$ f.n. $i = 0, 1, 2, \dots, n$, d.v.s. $f(x)$, kallas för den <u>inhomogena termen.</u>

Om $f(x) = 0$ för alla x (d.v.s. endast $y^{(i)}$-termer) så är den linjära ODE:n <u>homogen.</u> Annars, d.v.s. $f(x) \neq 0$ f.n. x, så är den <u>inhomogen.</u>

En ODE som inte är linjär kallas <u>icke-linjär</u>.

<u>Sats:</u> Om y_1 och y_2 är två lösningar till den linjär homogena ODE:n

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

så är också linjärkombinationen $y = Ay_1 + By_2$ det.

<u>Sats:</u> Om y_1 löser den linjära homogena ekvationen

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

och y_2 löser den linjära inhomogena ekvationen

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (*)$$

så är $y = y_1 + y_2$ också en lösning till $(*)$.

⑦ Låt $P_n(r) = a_n(x)r^n + \cdots + a_2(x)r^2 + a_1(x)r + a_0(x)$, d.v.s. ett n:te-gradspolynom i variabeln r.
Då kan man skriva en motsvarande n:te ordningens linjära inhomogena ODE med inhomogen term $f(x)$ som

$$P_n(D)y(x) = f(x)$$

där $D = \frac{d}{dx}$ differentialoperator, d.v.s.

$$P_n(D) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

Första ordningens ODE:er

Separabla ODE:er: En första ordningens ODE på formen $\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)}$ (**)

kallas för en separabel ODE.

För att lösa (**) så gör man följande

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow [\text{Antag } g(y) \neq 0]\ \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int \frac{dy}{g(y)} = f(x) \Leftrightarrow \boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx}$$

Minnesregel: Multiplicera med dx och dividera med $g(y)$ i (**)

$$\Longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Sedan integrera: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

Exempel: Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2y^3 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

Lösning: $\frac{dy}{dx} = x^2 y^3 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int x^2 dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3}x^3 + C$

Men $y(1) = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3}1^3 + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{18} - \frac{1}{3} = -\frac{1+6}{18} = -\frac{7}{18}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{9} =$

$= \frac{7-6x^3}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{7-6x^3} \Leftrightarrow \boxed{y(x) = \frac{3}{\sqrt{7-6x^3}}}$ □

Exempel: Lös integralekvationen $y(x) = 3 + 2\int_1^x t\,y(t)\,dt$

Lösning: Derivera ekvationen

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + C$ (*)

Men integralekvationen ger:

$y(1) = 3 + 2\int_1^1 t\,y(t)\,dt = 3$

Stoppa in i (*): $\ln 3 = 1^2 + C \Leftrightarrow C = \ln 3 - 1$

Då blir (*): $\ln|y| = x^2 + \ln 3 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{x^2+\ln 3 - 1} \Leftrightarrow |y| = 3e^{x^2-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(x) = \pm 3e^{x^2-1}$, kan ej vara -

eftersom $y(1) = 3 > 0$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 3e^{x^2-1}}$ □

9

Första ordningens linjära ODE:er:

Betrakta den allmänna första ordningens linjära ODE:n

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)} \qquad (**)$$

där p, q givna funktioner.

Vi har två möjlig fall:

- Fall 1: Antag $\boxed{q(x) = 0}$, d.v.s. $(**)$ homogen:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0$$

kan vi lösa eftersom den är separabel:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = C - \int p(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{C} e^{-\int p(x)\,dx} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(x) = Ke^{-\mu(x)}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

där $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ är godtycklig antiderivata till $p(x)$.

- Fall 2: Antag $\boxed{q(x) \neq 0}$ (f.n. x). Multiplicera $(**)$ med den s.k. integrerande faktorn (IF) $e^{\mu(x)}$, där $\mu(x) = \int p(x)\,dx$ som i Fall 1:

$$e^{\mu(x)}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = e^{\mu(x)} q(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\mu(x)} p(x)y = e^{\mu(x)} q(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx}+e^{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx}y=e^{\mu(x)}q(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d}{dx}e^{\mu(x)}\right)y=e^{\mu(x)}q(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y\right)=e^{\mu(x)}q(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu(x)}y=\int e^{\mu(x)}q(x)\,dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(x)=e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)}q(x)\,dx}$$

<u>OBS:</u> Lär er <u>metoden</u>, inte ovanstående formel!

<u>Exempel:</u> Lös $\frac{dy}{dx}+xy=x^3$

<u>Lösning:</u> $p(x)=x \Rightarrow \mu(x)=\int p(x)\,dx=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow IF=e^{\mu(x)}=e^{x^2/2}$$

ODE:n blir efter multiplikation med IF:

$$e^{x^2/2}\frac{dy}{dx}+\underbrace{\left(e^{x^2/2}x\right)}_{=\frac{d}{dx}e^{x^2/2}}y=e^{x^2/2}x^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}y\right)=e^{x^2/2}x^3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2/2}y=\int e^{x^2/2}x^3\,dx=$$

$$=\int \underbrace{x^2}_{\downarrow}\cdot\underbrace{e^{x^2/2}x\,dx}_{\uparrow}=$$

(Partiell integration)

$$=\left[\begin{cases}U=x^2\\ dU=2x\,dx\end{cases},\ \begin{cases}dV=e^{x^2/2}x\\ V=e^{x^2/2}\end{cases}\right]=$$

$$=x^2e^{x^2/2}-\int e^{x^2/2}\cdot 2x\,dX=$$

$$= x^2 e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2},\ C \in \mathbb{R}} \quad \square$$

Första ordningens "homogena" ODE:er:

Betrakta den första ordningens ODE på formen

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (*)$$

En sådan kallas "homogen". (OBS: Har inget med linjära homogena ODE:er att göra. Detta homogenitetsbegrepp har att göra med flervariabelanalys; $g(x,y)$ är en homogen funktion av grad 0 om $g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$.)

För att lösa $(*)$ så införs $v(x)$ där

$$v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xv$$

där man efter derivering får $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot v + x\frac{dv}{dx} =$

$$= v + x\frac{dv}{dx}$$

Då blir $(*)$:

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

$$\Leftrightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}}$$

memorera ej formeln, lär er metoden!

som är separabel och därför i princip lösbar.

Exempel: Lös $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2} \qquad (**)$

Lösning: Detta är en "homogen" ODE eftersom

$$\frac{x^2+xy}{xy+y^2} = \frac{(x^2+xy)/x^2}{(xy+y^2)/x^2} = \frac{1+y/x}{y/x+(y/x)^2} =: f\left(\frac{y}{x}\right)$$

där $f(u) = \dfrac{1+u}{u+u^2}$

Sätt $v = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = xv \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

$\Rightarrow$ (**) kan skrivas

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{v+v^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{v+v^2} - v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1+v}{v(1+v)} - v\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{v} - v\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1-v^2}{v}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{v}{1-v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-v^2| = \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow$$

$\boxed{C_2 = -2C_1}$ $$\Leftrightarrow \ln|1-v^2| = C_2 - 2\ln|x| \Leftrightarrow$$

$\boxed{C_3 = e^{C_2}}$ $$\Leftrightarrow |1-v^2| = \underbrace{C_3}_{>0}|x|^{-2} = C_3/x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = C_3/x^2 \Leftrightarrow \frac{|x^2-y^2|}{x^2} = \frac{C_3}{x^2} \Leftrightarrow$$

[$v = y/x$]

$$\Leftrightarrow |x^2-y^2| = C_3 \quad (C_3 > 0) \Leftrightarrow$$

$\boxed{C = \pm C_3}$ $$\Leftrightarrow \boxed{x^2-y^2 = C} \quad (C \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$$

$\boxed{C_4 = -C}$ $$\left(\Leftrightarrow y^2 = x^2 + C_4 \Leftrightarrow y(x) = \pm\sqrt{x^2+C_4}\right) \quad \square$$

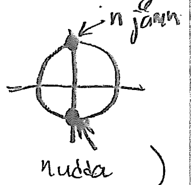
13

Några jämna uppgifter

9.4:12 Serie $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi)}{\ln\ln n}$, absolut-konvergent, betingat konvergent eller divergent?

Lösning: $\sum_{n=10}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\pi)}{\ln\ln n} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)}{\ln\ln n} =$

$$= \frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$$

(Enhetscirkel: 

)

- Absolutkonvergent? $\sum_{n=10}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=10}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}\right| =$

$$= \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln n}$$

$\ln\ln n < n \quad \forall n \geq 10 \Rightarrow \frac{1}{\ln\ln n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 10$

Ekvivalent med $n < e^{e^n}$ vilket ju stämmer

$\Rightarrow \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln n}$ divergerar ty $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n}$ gör det

(Jämförelsekriteriet #1)

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Serien ej absolutkonvergent.}}$

- Konvergent? $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$, vi ser att serien är alternerande, att $\{|a_n|\}$ är avtagande samt att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Enligt kriteriet för alternerande serier är alltså serien konvergent

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Serien är betingat konvergent}}$

9.4:20 För vilka x absolutkonvergerar, konvergerar betingat resp. divergerar serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$?

Lösning: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$

- **Absolutkonvergens:** $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $|a_n| = \frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3x+2|}{5}\right)^n$

Kvotkriteriet ger:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{|2n+1|}\left(\frac{|3x+2|}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3x+2|}{5}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| \frac{|3x+2|}{5} =$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2-1/n}{2+1/n}\right|\right)}_{=1} \frac{|3x+2|}{5} = \frac{|3x+2|}{5}$$

Konvergens: $\rho < 1 \Leftrightarrow \frac{|3x+2|}{5} < 1 \Leftrightarrow$
($\Rightarrow$ absolutkonv.)

$$\Leftrightarrow |3x+2| < 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x + \tfrac{2}{3}| < \tfrac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{5}{3} < x + \tfrac{2}{3} < \tfrac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -7/3 < x < 1$$

Divergens: $\rho > 1 \Leftrightarrow$ [se ovan] $x < -7/3$ el. $x > 1$

För $\rho = 1 \Leftrightarrow x = -7/3,\ x = 1$ kan ej kvotkriteriet avgöra absolutkonvergens.

(15)

- $\underline{x = -7/3} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3(-7/3)+2|}{5}\right)^n =$
$$= \frac{1}{2n-1}$$

Denna uppför sig som den harmoniska serien (använd Jämförelsekriterium #2) så ingen absolutkonvergens.

- $\underline{x = 1} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{|2n-1|}\left(\frac{|3\cdot 1+2|}{5}\right)^n = \frac{1}{2n-1}$

Denna uppför sig som den harmoniska serien (använd Jämförelsekriteriet #2) så ingen absolutkonvergens.

$\boxed{\text{Vi har alltså absolutkonvergens för } x \in (-\tfrac{7}{3}, 1)}$

- **Betingad konvergens:** För $x \leq -7/3$, $x \geq 1$.

- $\underline{x < -7/3} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\Big(\underbrace{\frac{3x+2}{-5}}_{>1}\Big)^n \Rightarrow$ Divergens ($a_n \not\to 0$)

- $\underline{x = -7/3} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3(-7/3)+2}{-5}\right) = \frac{1}{2n-1}$,

Samma slutsats som förut, ingen konvergens

- $\underline{x = 1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{3\cdot 1+2}{-5}\right)^n = \frac{1}{2n-1}(-1)^n$,

enligt kriterium för alternerande serier konvergerar denna

- $\underline{x > 1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n-1}\Big(\underbrace{\frac{3x+2}{-5}}_{<-1}\Big)^n \Rightarrow$ Divergens ($a_n \not\to 0$)

$\boxed{\text{Vi har alltså betingad konvergens för } x = 1 \text{ och divergens för } x \leq -7/3 \text{ och } x > 1.}$

(16)

17.1:6 $y'' + 4y' - 3y = 2y^2$

Detta är en en andraordningens ODE ty högsta ordningens derivata som är involverad är en andraderivata.

P.g.a. $2y^2$-termen kan inte ODE:n vara linjär, den är alltså icke-linjär.

7.9:18 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, lös begynnelsevärdesproblemet

Lösning: $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2$ (*)

$\mu(x) = \int 3x^2 \, dx = x^3$

$\Rightarrow I.F. = e^{\mu(x)} = e^{x^3}$

Då blir (*): $e^{x^3}\left(\frac{dy}{dx} + 3x^2 y\right) = e^{x^3} x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x^3}\frac{dy}{dx} + (\underbrace{e^{x^3} \cdot 3x^2}_{= \frac{d}{dx}(e^{x^3})})y = e^{x^3} x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^3} y\right) = e^{x^3} x^2 = \frac{1}{3} e^{x^3} \cdot 3x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x^3} y = \frac{1}{3}\int e^{x^3} \cdot \underbrace{3x^2}_{= \frac{d}{dx}(x^3)} dx =$

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{3} + Ce^{-x^3}$

Men $y(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + Ce^0 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + C = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = 1 - 1/3 = 2/3$

17

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-x^3}}$$

17.2:4

Lös den "homogena" ODE:n

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + y^3} \qquad (*)$$

Lösning: $HL_{(*)} = \frac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + y^3} = \frac{1 + 3y^2/x^2}{3y/x + y^3/x^3} =$

$$= \frac{1 + 3(y/x)^2}{3(y/x) + (y/x)^3} = \underbrace{\left(\frac{1+3t^2}{3t+t^3}\right)}_{f(t)}\Bigg|_{t = \frac{y}{x}}$$

d.v.s. en funktion av y/x. ODE:n $(*)$ är verkligen "homogen".

Låt $v = y/x \Leftrightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

Då blir $(*)$:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{3v+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{3v+v^3} - v =$$

$$= \frac{(1+3v^2) - v(3v+v^3)}{3v+v^3} =$$

$$= \frac{1+3v^2-3v^2-v^4}{v(3+v^2)} =$$

$$= \frac{1-v^4}{v(3+v^2)} \Leftrightarrow [\text{Separabel}]$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{v(3+v^2)}{1-v^4}\,dv = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{3+v^2}{1-(v^2)^2}\, v\,dv = \ln|x| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} u = v^2 \\ du = 2v\,dv \Leftrightarrow v\,dv = \frac{1}{2}du \end{cases}\right]$$

$$\int \frac{3+u}{1-u^2}\frac{1}{2}du = \ln|x| + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}du + \int \frac{u}{1-u^2}du = 2\ln|x| + C_2, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{-1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u} \quad \text{(borde man se direkt)}\right]$$

$$3\int\left(-\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\right)du + \frac{1}{2}\int\frac{-2u}{1-u^2}du$$

$$= 2\ln|x| + C_2, \ C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(-\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u|\right) - \frac{1}{2}\ln|1-u^2| =$$

$$= 2\ln|x| + C_2, \ C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \ln|1-u^2| = 4\ln|x| + C_3, \ C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left[u = v^2 = (y/x)^2 = y^2/x^2\right]$$

$$3\ln\left|\frac{y^2/x^2+1}{y^2/x^2-1}\right| - \ln\left|1 - \frac{y^4}{x^4}\right| =$$

$$= \ln(x^4) + C_3, \ C_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3\ln\left|\frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}\right| - \ln\frac{|x^4-y^4|}{x^4} = \ln(x^4) + C_3$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{(x^2+y^2)^3}{(x^2-y^2)^3}\right| - \ln|(x^2+y^2)(x^2-y^2)| = C_3$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2-y^2)^4}\right| = C_3 \Leftrightarrow \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = C_4, C_4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2} = C, \ C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2 = C(x^2-y^2), \ C \in \mathbb{R}}$$

19 Se även RÖ 10 & 13 HT09 där jag löst bl.a.

9.4:6 , 9.4:10 , 9.4:22,

17.1:4 , 17.1:8 , 7.9:8 ,

7.9:12 , 7.9:20 , 17.2:6